



آموزش ریاضی عمومی ۱

بامهندس
مجتبی لاشینی

ویژه تمامی رشته های دانشگاهی

mojtabalashini ▶

m-lashini.ir 

mojtabalashini.riazi 

۰۹۱۹۹۳۶۲۷۱۷ 

انتگرال:

اگر تابع $F(x)$ یک تابع اولیه برای $f(x)$ باشد یعنی $F'(x) = f(x)$ آنگاه

$$\int f(x) dx = F(x) + C \quad \text{انتگرال نامعین:}$$

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \quad (n \neq -1) \quad \text{فرمول مهم انتگرال گیری:}$$

$$\int x^r dx = \frac{x^{r+1}}{r+1} + C, \quad \int kx^r dx = \frac{kx^{r+1}}{r+1} + C$$

$$\int (x^r + \omega) dx = \frac{x^{r+1}}{r+1} + \omega x + C, \quad \int x^{\frac{1}{r}} = \frac{x^{\frac{1}{r}+1}}{\frac{1}{r}+1} + C$$

$$\int x^{-1} dx = \ln|x| + C \quad \text{یک حالت خاص:}$$

خاصیت خطی جود انتگرال:

$$\int (af(x) + bg(x)) dx = a \int f(x) dx + b \int g(x) dx$$

$$\int (kx^r + \omega) dx = k \int x^r dx + \omega \int 1 dx = k \left(\frac{x^{r+1}}{r+1} \right) + \omega (x) + C$$

انتگرال از ضرب و تقسیم رد نمی شود.

$$\int (n+1)(n^2-3) dn \neq \left(\int (n+1) dn \right) \times \left(\int (n^2-3) dn \right)$$

$$\xrightarrow{\text{درست}} \int (n^3 + n^2 - 3n - 3) dn = \frac{n^4}{4} + \frac{n^3}{3} - \frac{3n^2}{2} - 3n + C$$

نکته: برای محاسبه انتگرال عبارات کسری مثل $\frac{a}{n^n}$ آن را به صورت $a n^{-n}$ می نویسیم

همچنین برای محاسبه عبارات شامل رادیکال مثل $\sqrt[n]{n^m}$ آن را به صورت $n^{\frac{m}{n}}$ می نویسیم

$$\int \left(\frac{1}{n^2} + \sqrt[n]{n^2} \right) dn = \int (n^{-2} + n^{\frac{2}{n}}) dn = \frac{n^{-1}}{-1} + \frac{n^{\frac{5}{5}}}{\frac{5}{5}} = \frac{-1}{n} + \frac{1}{5} n^{\frac{5}{5}} + C$$

$$\int \left(\frac{\sqrt[n]{n}}{n^2} \right) dn = \int \frac{n^{\frac{1}{5}}}{n^2} dn = \int n^{\frac{-9}{5}} dn = \frac{n^{\frac{-4}{5}}}{\frac{-4}{5}} = \frac{-5}{4 \times n^{\frac{4}{5}}} + C$$

$$\int \sqrt{n \times \sqrt[n]{n}} dn = \int \sqrt[n]{n^1 \times n^{\frac{1}{n}}} dn = \int \sqrt[n]{n^{\frac{n+1}{n}}} dn = \int n^{\frac{1}{n}} dn = \frac{n^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}} = \frac{2}{5} n^{\frac{5}{2}} + C$$

$$\int \frac{n^2-1}{n^2+n+1} dn = \int \frac{(n-1)(n+1)}{n^2+n+1} dn = \int (n-1) dn = \frac{n^2}{2} - n + C$$

$$\int 3\sqrt{n} - \frac{1}{\sqrt{n}} dn = \int 3n^{\frac{1}{2}} - n^{-\frac{1}{2}} = \frac{3n^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} - \frac{n^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} = 2n^{\frac{3}{2}} - 2n^{\frac{1}{2}} + C$$

$$\begin{aligned} \int \left(\sqrt{n} - \frac{1}{n}\right)^2 dn &= \int \left(n + \frac{1}{n^2} - \frac{2\sqrt{n}}{n}\right) dn = \int \left(n + n^{-2} - 2n^{-\frac{1}{2}}\right) dn \\ &= \frac{n^2}{2} + \frac{n^{-1}}{-1} - 2 \frac{n^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} = \frac{n^2}{2} - \frac{1}{n} - 4n^{\frac{1}{2}} + C \end{aligned}$$

نکته: برای کسرهایی با مضرب یک جمله‌ای ابتدا آن را تفکیک می‌کنیم.

$$\int \frac{n+1}{\sqrt{n}} dn = \int \left(\frac{n}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n}}\right) dn = \int \left(n^{\frac{1}{2}} + n^{-\frac{1}{2}}\right) dn = \frac{n^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + \frac{n^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + C$$

$$\begin{aligned} \int \frac{1-n}{n\sqrt{n}} dn &= \int \left(\frac{1}{n\sqrt{n}} - \frac{n}{n\sqrt{n}}\right) dn = \int \left(n^{-\frac{3}{2}} - n^{-\frac{1}{2}}\right) dn = \frac{n^{-\frac{1}{2}}}{-\frac{1}{2}} - \frac{n^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + C \\ &= -2 \frac{1}{\sqrt{n}} - 2\sqrt{n} + C \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int \frac{5n-1}{3\sqrt{n^3}} dn &= \int \frac{5n}{3n^{\frac{3}{2}}} - \frac{1}{3n^{\frac{3}{2}}} = \int \left(\frac{5}{3}n^{-\frac{1}{2}} - \frac{1}{3}n^{-\frac{3}{2}}\right) dn = \\ &= \frac{5}{3} \frac{n^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} - \frac{1}{3} \frac{n^{-\frac{1}{2}}}{-\frac{1}{2}} = \frac{10}{3}\sqrt{n} - \frac{2}{3\sqrt{n}} + C \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int \frac{(1+\sqrt{n})^2 - 1}{n} dn &= \int \frac{1+n+2\sqrt{n}-1}{n} dn = \int \left(\frac{n}{n} + \frac{2\sqrt{n}}{n}\right) dn = \int \left(1 + 2n^{-\frac{1}{2}}\right) dn \\ &= n + 2 \frac{n^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + C = n + 4\sqrt{n} + C \end{aligned}$$

نکته: برای کسرهایی با مخرج جبری از یک جمله ابتدای عبارت را ساده می کنیم.

$$\int \frac{n^2-1}{n-1} dn = \int (n+1) dn = \frac{n^2}{2} + n + C$$

$$\frac{n^2-1}{n-1} = \frac{(n-1)(n+1)}{n-1} = n+1$$

$$\int \frac{n^3-3}{\sqrt{n}-1} dn = \int (n\sqrt{n}+3) dn = \frac{n^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + 3n + C = \frac{2}{3}n^{\frac{3}{2}} + 3n + C$$

$$\frac{n^3-3}{\sqrt{n}-1} \times \frac{\sqrt{n}+1}{\sqrt{n}+1} = \frac{n^3-3}{n-1} \times \frac{\sqrt{n}+1}{\sqrt{n}+1} = n\sqrt{n}+3$$

Mojtaba Lashini

فرمول های مهم انتگرال:

$$① \int n^n dn = \frac{n^{n+1}}{n+1} + C \quad (n \neq -1)$$

$$② \int n^{-1} dn = \ln|n| + C$$

$$③ \int e^n dn = e^n + C$$

$e^0 \rightarrow 1 \times e^0, e^{nr} \rightarrow nr \times e^{nr}$
 $e^n \rightarrow 1 \times e^n$

$$④ \int a^n dn = \frac{a^n}{\ln a} + C \quad (a > 0, a \neq 1), \int r^n dn = \frac{r^n}{\ln r} + C$$

$$⑤ \int \sin n dn = -\cos n + C$$

$$⑥ \int \cos n dn = \sin n + C$$

$$\textcircled{۷} \int (1 + \operatorname{tg}^2 u) du = \operatorname{tg} u + C$$

$$\textcircled{۸} \int (1 + \cot^2 u) du = -\cot u + C$$

$$\textcircled{۹} \int (\operatorname{tg} u) du = -\ln |\cos u| + C$$

$$\textcircled{۱۰} \int (\cot u) du = \ln |\sin u| + C$$

$$\textcircled{۱۱} \int \frac{du}{a^2 + u^2} = \frac{1}{a} \operatorname{Arctg} \frac{u}{a} + C, \quad \int \frac{1}{1 + u^2} = \operatorname{Arctg} u + C$$

$$\textcircled{۱۲} \int \frac{du}{\sqrt{a^2 - u^2}} = \operatorname{Arcsin} \left(\frac{u}{a} \right) + C, \quad \int \frac{1}{\sqrt{1 - u^2}} = \operatorname{Arcsin} u + C$$

$$\textcircled{۱۳} \int \frac{du}{\sin u} = \ln \left| \operatorname{tg} \frac{u}{2} \right| + C$$

$$\textcircled{۱۴} \int \frac{du}{\cos u} = \ln \left| \operatorname{tg} \left(\frac{u}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right| + C$$

$$\textcircled{۱۵} \int \sinh u du = \cosh u + C$$

$$\textcircled{۱۶} \int \cosh u du = \sinh u + C$$

$$\textcircled{۱۷} \int \operatorname{tg} h u du = \ln |\cosh u| + C$$

$$\textcircled{۱۸} \int \cot h u du = \ln |\sinh u| + C$$

مثال: انتگرال های زیر را محاسبه کنید.

$$① \int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$$

$$② \int \omega e^n dx = \omega e^n + C$$

$$③ \int (x + \tan^2 x) dx = \int (1 + (1 + \tan^2 x)) dx = x + \tan x + C$$

$$④ \int \frac{dx}{9+x^2} = \int \frac{1}{3^2 + x^2} = \frac{1}{3} \text{Arc} \tan \frac{x}{3}$$

$$⑤ \int \frac{dx}{\sqrt{3-x^2}} = \int \frac{1}{\sqrt{(\sqrt{3})^2 - x^2}} = \text{Arc} \sin \left(\frac{x}{\sqrt{3}} \right)$$

محاسبه $\int f(ax+b) dx$: برای محاسبه کافی است در فرمول ها به جای x عبارت

$ax+b$ را قرار دهیم پس $\frac{1}{a}$ را در جواب انتگرال ضرب کنیم.

$$\int \cos(xn+\pi) dx = \left(\frac{1}{n} \right) \sin(xn+\pi) + C$$

$$\int \cosh nx dx = \frac{1}{n} \sinh nx + C$$

$$\int \sin^3 u + \cos^3 v dx = -\frac{1}{3} \cos^3 u + \frac{1}{3} \sin^3 v + C$$

$$\int (e^{x+1} + a) dx = \frac{1}{e} e^{x+1} + x + C$$

روش تغییر متغیر: تابع $f(n)$ و مشتق آن در صورت سوال موجود است.

$$\int \frac{n}{n^2+1} dn = \boxed{\begin{matrix} n^2+1=u \\ 2n dn=du \end{matrix}} = \int \frac{du}{u} = \int u^{-1} du = \ln|u| + C = \ln|n^2+1| + C \quad \text{جواب}$$

$$\int \sin^9 n \times \cos n \, dn = \boxed{\begin{matrix} \sin n = u \\ \cos n \times dn = du \end{matrix}} = \int u^9 \times du = \frac{u^{10}}{10} + C = \frac{\sin^{10} n}{10} + C$$

$$\int (tg^n + tg^n) dn = \int tg^n (1 + tg^n) dn = \boxed{\begin{matrix} tg n = u \\ (1 + tg^2 n) dn = du \end{matrix}} = \int u^r du = \frac{u^{r+1}}{r+1} + C = \frac{tg^{r+1} n}{r+1} + C$$

$$\int \frac{\text{Arctg} n}{1+n^2} dn = \boxed{\begin{matrix} \text{Arctg} n = u \\ \frac{1}{1+n^2} dn = du \end{matrix}} = \int u du = \frac{u^2}{2} + C = \frac{(\text{Arctg} n)^2}{2} + C$$

$$\int \frac{\text{Arcsin} n}{\sqrt{1-n^2}} dn = \boxed{\begin{matrix} \text{Arcsin} n = u \\ \frac{1}{\sqrt{1-n^2}} dn = du \end{matrix}} = \int u du = \frac{u^2}{2} + C = \frac{(\text{Arcsin} n)^2}{2} + C$$

$$\int (n+1) \sqrt[n]{n^2+n+1} dn = \boxed{\begin{matrix} n^2+n+1=u \\ (2n+1) dn = du \end{matrix}} = \int \sqrt[r]{u} du = \frac{u^{\frac{r+1}{r}}}{\frac{r+1}{r}} + C = \frac{r}{r+1} (n^2+n+1)^{\frac{r+1}{r}} + C$$

$$\int \frac{\sin n + n \cos n}{(n \sin n)^r} dn = \int \frac{du}{u^r} = \int u^{-r} du = \frac{u^{-r+1}}{-r+1} + C = \frac{1}{u^{r-1}} + C$$

$$n \sin n = u \rightarrow (\sin n + n \cos n) dn = du$$

$$= \frac{1}{n \sin n} + C$$

$$\int r (n + \sqrt{n})^r \left(\frac{r\sqrt{n} + 1}{r\sqrt{n}} \right) dn = \int r u^r du = r \frac{u^{r+1}}{r+1} + C = \frac{u^{r+1}}{r+1} + C = \frac{(n + \sqrt{n})^{r+1}}{r+1} + C$$

$$n + \sqrt{n} = u \rightarrow 1 + \frac{1}{2\sqrt{n}} dn = \frac{r\sqrt{n} + 1}{r\sqrt{n}} = du$$

$$\int (tg n + cot n)^{\omega} (tg n - cot n) dn = \int (tg n + cot n)^{\omega} (tg n - cot n) du = \int u^{\omega} du$$

$$tg n + cot n = u$$

$$1 + tg^2 n - cot^2 n du = du$$

$$= \frac{u^{\omega+1}}{\omega+1} + C = \frac{(tg n + cot n)^{\omega+1}}{\omega+1} + C$$

$$\int \frac{(\sqrt{n}-1)^r (\sqrt{n}+1)^r}{\sqrt{n}} dn = \int \frac{r(\sqrt{n}-1)^r}{r\sqrt{n}} dn = \int r u^r du = r \frac{u^{r+1}}{r+1} + C$$

$$\sqrt{n}-1 = u \rightarrow \frac{1}{2\sqrt{n}} dn = du$$

$$= \frac{u^{r+1}}{r+1} + C = \frac{(\sqrt{n}-1)^{r+1}}{r+1} + C$$

$$\int -\sqrt[r]{\frac{\sin n}{\cos n}} dn = \int -\sqrt[r]{\frac{du}{u^r}} = \int -u^{-\frac{r}{r}} du = -\frac{u^{-\frac{r}{r}+1}}{-\frac{r}{r}+1} + C = \frac{r}{r-1} u^{\frac{r-1}{r}} + C$$

$$\cos n = u \rightarrow -\sin n dn = du$$

$$= \frac{r}{r-1} (\cos n)^{\frac{r-1}{r}} + C$$

$$\int \sin n (1 + tg^2 n)^r dn = \int r \sin n \cos n \left(\frac{1}{\cos^2 n} \right) dn = r \int \frac{\sin n dn}{\cos^2 n}$$

$$\boxed{\cos n = u} \rightarrow -\sin n dn = du$$

$$= -r \int \frac{du}{u^2} = -r \int u^{-2} du = -r \frac{u^{-2+1}}{-2+1} = \frac{1}{\cos^2 n}$$

$$\int \sin^r n \times \tan n \, dn = \int \sin^{r-1} n \cos n \times \frac{\sin n}{\cos n} = \int \sin^{r-1} n \cos n \, dn =$$

$$\sin n = u, \quad \cos n \, dn = du$$

$$= \int u^r \, du = \frac{u^{r+1}}{r+1} + C = \frac{\sin^{r+1} n}{r+1} + C$$

$$\int \frac{1}{r} \sqrt{\frac{n-1}{n+1}} \times \frac{1}{(1+n^2)} \, dn = \int \frac{1}{r} u^{\frac{1}{2}} \, du = \frac{1}{r} \frac{u^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3r} \left(\frac{n-1}{n+1} \right)^{\frac{3}{2}} + C$$

$$\left(\frac{n-1}{n+1} = u \rightarrow \frac{2}{(n+1)^2} \, dn = du \right)$$

$$\frac{1}{r} \int \frac{\sin n \cdot \cos n}{\sqrt{1+\sin^2 n}} \, dn = \frac{1}{r} \int \frac{du}{(1+u)^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{r} \int (1+u)^{-\frac{3}{2}} \, du = \frac{1}{r} \frac{(1+u)^{-\frac{1}{2}}}{-\frac{1}{2}} = -\frac{2}{r} \frac{1}{\sqrt{1+\sin^2 n}}$$

Mojtaba Lashini

$$\boxed{\sin^2 n = u} \rightarrow 2 \sin n \cos n \, dn = du$$

$$= \sqrt{1+\sin^2 n}$$

$$\int \frac{e^n}{e^n + a} \, dn = \int \frac{du}{u} = \ln|u| + C = \ln|e^n + a| + C$$

$$e^n + a = u \rightarrow e^n \, dn = du$$

$$\int \frac{\sin^9 n}{\cos^{11} n} \, dn = \int \frac{\sin^8 n}{\cos^9 n} \times \frac{1}{\cos n} \, dn = \int (\tan^8 n) (1 + \tan^2 n) \, dn$$

$$\boxed{\tan n = u \rightarrow (1 + \tan^2 n) \, dn = du} \quad = \int u^9 \, du = \frac{u^{10}}{10} + C = \frac{\tan^{10} n}{10} + C$$

$$\int \frac{(n+1)^v}{(n+r)^q} \, dn = \int \frac{(n+1)^v}{(n+r)^q} \times \frac{1}{(n+r)^r} \, dn = \int \left(\frac{n+1}{n+r} \right)^v \frac{1}{(n+r)^r} \, dn$$

$$\frac{n+1}{n+r} = u \rightarrow \frac{1}{(n+r)^r} \, dn = du$$

$$= \int u^v \, du = \frac{u^{v+1}}{v+1} + C = \frac{1}{v+1} \left(\frac{n+1}{n+r} \right)^{v+1} + C$$

$$\star \int \sin^n x dx = \int \sin^{n-2} x \times \sin x dx = \int (1 - \cos^2 x) \sin x dx =$$

$$\boxed{\cos x = u} \rightarrow -\sin x dx = du \quad = \int (u^2 - 1) du = \frac{u^3}{3} - u + C = \frac{\cos^3 x}{3} - \cos x + C$$

$$\star \int \cos^n x dx = \int \cos^{n-2} x \times \cos x dx = \int (1 - \sin^2 x) \cos x dx =$$

$$\sin x = u \rightarrow \cos x dx = du \quad = \int 1 - u^2 du = u - \frac{u^3}{3} + C = \sin x - \frac{\sin^3 x}{3} + C$$

$$\star \int \sin^2 x dx = \int \frac{1 - \cos 2x}{2} dx = \int \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 2x \right) dx$$

$$\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}$$

$$= \frac{1}{2} x - \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \sin 2x + C$$

$$\star \int \cos^2 x dx = \int \frac{1 + \cos 2x}{2} dx = \int \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2x dx = \frac{1}{2} x + \frac{1}{2} \sin 2x + C$$

$$\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}$$

$$\star \int \tan^5 x dx = \int \boxed{\tan^3 x + \tan x} \cdot \boxed{-\tan^2 x - 1} + \tan x$$

$$= \int \tan^3 x (1 + \tan^2 x) dx - \int \tan x (1 + \tan^2 x) + \int \tan x = \int u^3 du - \int u du - \ln |\cos x|$$

$$\star \int \cot^5 x dx = \int \cot^3 x + \cot x - \cot^3 x - \cot x + \cot^3 x + 1 - 1$$

$$= \int \cot^3 x (1 + \cot^2 x) dx - \int \cot x (1 + \cot^2 x) + \int 1 dx = \int \frac{u^3}{u^2} + \frac{u^3}{u} - \cot x - x = -\frac{\cot^2 x}{2} + \frac{\cot^3 x}{3} - \cot x - x + C$$

$$\int \frac{\cos n}{1 + \sin^2 n} dn = \int \frac{du}{1 + u^2} = \text{Arctg} u + C = \text{Arctg}(\sin n) + C$$

$$\boxed{\sin n = u} \rightarrow \cos n dn = du$$

$$\int \frac{\sin n}{1 + \cos^2 n} dn = - \int \frac{du}{1 + u^2} = -\text{Arctg} u = -\text{Arctg}(\cos n) + C$$

$$\boxed{\cos n = u} \rightarrow -\sin n dn = du$$

$$\int \frac{\sin^2 n}{1 + \sin^2 n} dn = \int \frac{du}{1 + u^2} = \text{Arctg} u + C = \text{Arctg}(\sin^2 n) + C$$

Mojtaba Lashini

$$\boxed{\sin^2 n = u} \rightarrow \sin^2 n dn = du$$

$$\int \frac{dn}{\sqrt{n} + n\sqrt{n}} = \int \frac{r dn}{(r\sqrt{n})(1 + (r\sqrt{n})^2)} = r \int \frac{du}{1 + u^2} = r \text{Arctg} u = r \text{Arctg} \sqrt{n} + C$$

$$\boxed{\sqrt{n} = u} \rightarrow \frac{1}{2\sqrt{n}} dn = du$$

$$\int \frac{dn}{\sqrt{1 - 9n}} = \int \frac{dn}{\sqrt{1 - (3\sqrt{n})^2}} = \text{Arcsin} 3\sqrt{n} + C$$

$$\frac{1}{r} \int -n e^{-n^r+1} dn = \frac{1}{r} \int e^u du = \frac{1}{r} e^u + C = \frac{1}{r} e^{-n^r+1} + C$$

$$-n^r+1 = u \rightarrow -r n^{r-1} dn = du$$

$$\int \frac{r \ln \sqrt{r}}{r^n} dr = r \int u du = \frac{r u^2}{2} + C = \frac{(\ln \sqrt{r})^2}{2} + C$$

$$\boxed{\ln \sqrt{r} = u} \rightarrow \frac{\frac{1}{2\sqrt{r}}}{\sqrt{r}} = \frac{1}{r} dr = du$$

$$\frac{1}{\ln a} \int \frac{\ln a a^n}{1+a^n} dr = \frac{1}{\ln a} \int \frac{du}{1+u^2} = \frac{1}{\ln a} (\arctg a^n) + C$$

$$a^n = u \rightarrow \ln a a^n dr = du \rightarrow$$

$$\frac{1}{r} \int r^n \cos(n^{\frac{r}{n}}) dr = \frac{1}{r} \int \cos u du = \frac{1}{r} \sin u + C = \frac{1}{r} \sin(n^{\frac{r}{n}}) + C$$

$$n^{\frac{r}{n}} = u \rightarrow r^{\frac{1}{n}} dr = du$$

$$r \int \frac{1}{r^{\frac{r}{n}} (1 + \sqrt[n]{r})} dr = r \int \frac{1}{1+u^2} = r \arctg u = r \arctg(\sqrt[n]{r}) + C$$

$$\sqrt[n]{r} = u \rightarrow \frac{1}{n} r^{\frac{1}{n}-1} dr = du$$

$$\int \cos^r u \times \frac{\sin^r u du}{\sin^r u \times \cos^r u} = \int \left(\frac{1}{r} \sin^2 u \right) \left[\sin^r u \right] =$$

$$\frac{1}{r} \int \sin^2 u - \sin^2 u \cos^2 u = \frac{1}{r} \int \frac{1 - \cos 2u}{2} - \frac{1}{r} \int \sin^2 u \cos^2 u du =$$

$$\frac{1}{2r} \left(u - \frac{1}{2} \sin 2u \right) - \frac{1}{4r} \times \frac{\sin^4 u}{4} + C$$

$$\boxed{n = r \lg u} \rightarrow \frac{dr}{\sqrt{r + n^r}} = \frac{du}{\sqrt{1 + u^2}}$$

$$\rightarrow dr = r(1 + u^2) = r \sec^2 u \rightarrow \int \frac{r(1 + u^2) du}{\sqrt{r + r \sec^2 u}} = \int \frac{1 + u^2}{\sqrt{1 + u^2}} = \int \sec u = \int \sec u =$$

$$\rightarrow \ln |\sec u + \tan u| = \ln \left| \frac{\sqrt{r + n^r}}{r} + \frac{n}{r} \right| + C$$

$$n = r \sin \theta \quad \int \frac{n^r dn}{\sqrt{9-n^2}} = \int \frac{9 \sin^r \theta \times r \cos \theta d\theta}{r \cos \theta} = 9 \int \sin^r \theta d\theta = 9 \int \frac{1 - \cos^2 \theta}{r} d\theta$$

$$\rightarrow dn = r \cos \theta d\theta \quad \boxed{= \frac{9}{r} \left(\theta - \frac{1}{r} \sin^2 \theta \right)}$$

$$\sqrt{9-n^2} = \sqrt{9-9\sin^2 \theta} = r |\cos \theta|$$

$$\sin a \cos b = \frac{1}{2} [\sin(a+b) + \sin(a-b)] \quad \sin a \sin b = \frac{1}{2} [\cos(a-b) - \cos(a+b)] \quad \cos a \cos b = \frac{1}{2} [\cos(a-b) + \cos(a+b)]$$

$$\int \frac{r \sin^m n \cos^r n dn}{\frac{1}{r} (\sin^{2m+1} n + \sin^{2r} n)} = \int \sin^{2m+1} n + \sin^{2r} n = \frac{1}{2m+2} \cos^{2m+2} n - \frac{1}{2r+2} \cos^{2r+2} n + C$$

$$\sin n = \frac{r}{1+t^2} \quad \cos n = \frac{1-t^2}{1+t^2} \quad dn = \frac{2t dt}{1+t^2} \quad z = \tan \frac{n}{2}$$

انتگرال را حل کنید: $\int R(\sin, \cos) dn$

$$\int \frac{dn}{\sin n + \cos n + 1} = \int \frac{\frac{2t dt}{1+t^2}}{\frac{r}{1+t^2} + \frac{1-t^2}{1+t^2} + \frac{1+t^2}{1+t^2}} = \int \frac{2t dt}{r+1-t^2} = \int \frac{1}{1+t^2} dt =$$

$$\ln|1+t| + C = \ln|1+\tan \frac{n}{2}| + C$$

مثال: $n = \tan \theta$

$$\int \frac{dn}{n^2 + 1 + n \sqrt{1+n^2}} = \frac{(1+\tan^2 \theta)}{(1+\tan^2 \theta) + (\tan \theta) \sqrt{1+\tan^2 \theta}} = \frac{\frac{1}{\cos^2 \theta}}{\frac{1}{\cos^2 \theta} + \frac{\sin \theta}{\cos^2 \theta}} = \frac{1}{1 + \sin \theta}$$

$n = \tan \theta$
 $dn = 1 + \tan^2 \theta d\theta$

$$= \int \frac{1 d\theta}{1 + \sin \theta} = \int \frac{\frac{r dt}{1+t^2}}{\frac{1+t^2}{1+t^2} + \frac{r t}{1+t^2}} = r \int \frac{dt}{(1+t)^2} =$$

$$= r \left(-\frac{1}{1+t} \right) = -\frac{r}{1+t}$$

انتگرال لیری به روش جزء جز:

فرض کنید u, v توابعی به حسب n باشند آنگاه:

$$\int u dv = uv - \int v du$$



$$\int \text{Arcsin } n \, dn = \left[\begin{array}{l} \text{Arcsin } n = u \rightarrow \frac{dn}{\sqrt{1-n^2}} = du \\ 1 \, dn = dv \rightarrow n = v \end{array} \right] = n \text{Arcsin } n - \int \frac{n}{\sqrt{1-n^2}} dn$$

$$= n \text{Arcsin } n + \sqrt{1-n^2} + C$$

$$\int n \sin n \, dn = \left[\begin{array}{l} n = u \rightarrow 1 = du \\ \sin n \, dn = dv \rightarrow -\cos n = v \end{array} \right] = -n \cos n + \int \cos n \, dn$$

$$= -n \cos n + \sin n + C$$

$$\int \frac{\ln n}{n^r} \, dn \left[\begin{array}{l} \ln n = u \rightarrow \frac{1}{n} = du \\ \frac{1}{n^r} \, dn = dv \rightarrow \frac{-1}{n} = v \end{array} \right] \Rightarrow \frac{\ln n}{n} + \int \frac{1}{n^r} \, dn$$

$$\text{جواب} = -\frac{\ln n}{n} - \frac{1}{n} + C$$

$$\int n e^{rn} dn = \boxed{\begin{matrix} n=u \rightarrow dn=du \\ e^{rn}dn=du \rightarrow \frac{1}{r}e^{rn}=u \end{matrix}} = \frac{n}{r} e^{rn} - \int \frac{1}{r} e^{rn}$$

$$= \frac{n}{r} e^{rn} - \frac{1}{r^2} e^{rn} + C$$

$$\int n^r \cos n dn = \boxed{\begin{matrix} n^r=u \rightarrow r n dn=du \\ \cos n dn=du \rightarrow \sin n=u \end{matrix}}$$

$$= n^r \sin n - r \int n \sin n = n^r \sin n - r(-n \cos n + \sin n) + C$$

Mojtaba Lashini

u	v
n	e^{an}
1	\frac{e^{an}}{a}
0	\frac{e^{an}}{a^2}

انتگرال گیری به کمک جدول:

$$\int n \cdot e^{an} = \frac{n e^{an}}{a} - \frac{e^{an}}{a^2}$$

u	v
n^r	\cos n
r n	\frac{1}{r} \sin n
r	-\frac{1}{r} \cos n
0	-\frac{1}{r^2} \sin n

$$\int n^r \cos n = \frac{n^r}{r} \sin n - \frac{r n}{r} \cos n - \frac{r}{r^2} \sin n + C$$

تجزیه کسرها برای انتگرال گیری:

$$\int \frac{dn}{n^2 - 5n + 4} = \int \frac{-1 dn}{n-2} + \int \frac{1 dn}{n-3} = -\ln|n-2| + \ln|n-3| + C$$

$$\frac{1}{(n-2)(n-3)} = \frac{A}{n-2} + \frac{B}{n-3} = \frac{A(n-3) + B(n-2)}{(n-2)(n-3)} = \frac{1}{(n-2)(n-3)}$$

$$\begin{cases} -3A - 2B = 1 \\ 3A + 2B = 0 \end{cases}$$

$$\boxed{B=1} \quad \boxed{A=-1}$$

$$\int \frac{n}{(n-1)(n^2+4)} dn = \frac{1}{5} \left(\int \frac{1}{n-1} - \int \frac{n}{n^2+4} + \int \frac{4}{n^2+4} \right)$$

$$\frac{n}{(n-1)(n^2+4)} = \frac{A}{n-1} + \frac{Bn+C}{n^2+4} = \frac{An^2+4A+Bn^2+Bn+Cn-C}{(n-1)(n^2+4)}$$

$$\begin{aligned} A+B &= 0 \rightarrow B = -A \\ -B+A+C &= 1 \\ 4A-C &= 0 \end{aligned} \quad \begin{aligned} C &= \frac{4}{5} \\ B &= -\frac{1}{5} \\ A &= \frac{1}{5} \end{aligned}$$

$$\rightarrow \frac{1}{5} \left(\ln|n-1| - \frac{1}{2} \ln|n^2+4| + 4 \times \frac{1}{2} \arctan\left(\frac{n}{2}\right) \right) + C$$

نکته: باروش تجزیه کسرها داریم:

$$\int \frac{dn}{n^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{n-a}{n+a} \right| + C$$

$$\int \frac{dn}{n^2 - 4} = \frac{1}{4} \ln \left| \frac{n-2}{n+2} \right| + C$$

انتگرال معین :

هرگاه تابع $f(x)$ در فاصله $[a, b]$ پیوسته باشد، $F(x)$ یک تابع اولیه

برای $f(x)$ باشد آنگاه داریم: $\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a) = F(x) \Big|_a^b$

مثال:

$$\int_{-1}^2 x^3 dx = \frac{x^4}{4} \Big|_{-1}^2 = \frac{16}{4} - \left(\frac{1}{4}\right) = \frac{15}{4} = 3.75$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx = \sin x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) - \sin 0 = 1 - 0 = 1$$

خواص انتگرال معین :

$$① \int_a^a f(x) dx = 0$$

$$② \int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$$

$$③ \int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx$$

عذر نسبت به سبب تقاضا در این مورد
 اگر $f(n)$ تابعی فرد باشد $\int_{-a}^a f(n) dn = 0$
 اگر $f(n)$ تابعی زوج باشد $\int_{-a}^a f(n) dn = 2 \int_0^a f(n) dn$

یادآوری: $\cos n$ تابعی زوج، $\sin n$ تابعی فرد است.

$$\int_e^{e^r} \frac{dn}{n(1+\ln n)} = \int \frac{du}{u} = \ln(1+\ln n) \Big|_e^{e^r} = \ln r - \ln 1$$

$$1+\ln n = u \rightarrow \frac{1}{n} dn = du$$

$$\frac{1}{r} \int_0^1 \frac{u^n}{\sqrt{1+u^r}} du = \frac{1}{r} \int_0^1 \frac{du}{\sqrt{u}} = \frac{1}{r} \int_0^1 u^{-\frac{1}{2}} du = \frac{1}{r} \frac{u^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} \Big|_0^1 = \frac{\sqrt{1+u^r}}{r} \Big|_0^1 = \frac{\sqrt{r}-1}{r}$$

$$1+u^r = u \rightarrow r u du = du$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} n \cos n = (n \sin n + \cos n) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \left(\frac{\pi}{2}\right) - (1) = \frac{\pi}{2} - 1$$

$$\begin{array}{c} n \\ \swarrow \quad \searrow \\ \cos n \\ \sin n \\ \downarrow \\ 0 \end{array}$$

$$|\oplus| = \oplus, |\ominus| = -\ominus$$

به تفصیل عدد شود.

انتگرال لیری قدر مطلق و برابری.

در صورتی که قدر مطلق
باید نگه شود.
(تفصیل علامت)

$$\int_1^5 |n-2| dn = \int_1^2 -n+2 dn + \int_2^5 n-2 dn$$

$$= \left(-\frac{n^2}{2} + 2n \right) \Big|_1^2 + \left(\frac{n^2}{2} - 2n \right) \Big|_2^5 = (2) - \left(-\frac{3}{2} \right) + \left(\frac{25}{2} - 10 \right) = 10$$

$$\int_0^{\pi} |\cos n| dn = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos n dn + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} -\cos n dn = \sin n \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \sin n \Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}$$

$$= (1-0) - (0-1) = 2$$

$$\int_4^7 [n] dn = \int_4^5 4 dn + \int_5^6 5 dn + \int_6^7 6 dn =$$

$$4n \Big|_4^5 + 5n \Big|_5^6 + 6n \Big|_6^7 = 4 + 5 + 6 = 15$$

$$\int_0^{\pi} [\cos n] dn = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 0 dn + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} -1 dn = 0 + (-n) \Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} = \left(-\pi + \frac{\pi}{2} \right) = -\frac{\pi}{2}$$

$$\int_{\frac{1}{2}}^1 n \left[\frac{1}{n} \right] dn = \int_{\frac{1}{2}}^1 n = \frac{n^2}{2} \Big|_{\frac{1}{2}}^1 = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{8} \right) = \frac{3}{8}$$

$$\frac{1}{2} < n < 1 \rightarrow \frac{1}{2} < \frac{1}{n} < 1$$

$$\int_{10}^{14} \left[\frac{n}{3} \right] dn = \int_{10}^{12} 5 dn + \int_{12}^{14} 6 dn = 5n \Big|_{10}^{12} + 6n \Big|_{12}^{14}$$

$$(60-50) + (84-72) = 42$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin n}{\sin n + \cos n} dn = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos n}{\sin n + \cos n} dn = \frac{\pi}{2} \quad \text{جذابیت}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos n}{\sin n + \cos n} dn = \frac{\pi}{2}$$

$$\int_0^a \frac{f(n)}{f(n) + f(a-n)} dn = \frac{a}{2}$$

Mojtaba Lashini

$$\int_0^a \frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n+1} + \sqrt{a-n}} dn = \frac{a}{2} = 1$$

$f(n) = \sqrt{n+1}$
 $f(a-n) = \sqrt{a-n+1} = \sqrt{2-n}$

$$\int_0^{\pi} n f(\sin n) dn = \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin n) dn$$

$$\int_0^{\pi} \frac{n \sin n}{1 + \sin n} dn = \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 + \sin n - 1}{1 + \sin n} dn =$$

$$\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(1 - \frac{1}{1 + \sin n} \right) dn = \pi \left(n - \frac{1}{\cos n} \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \pi \left(\frac{\pi}{2} - 1 \right)$$

$$\frac{1}{1 + \sin n} \cdot \frac{1 - \sin n}{1 - \sin n} = \frac{1 - \sin n}{\cos^2 n} = \frac{1}{\cos^2 n} - \frac{\sin n}{\cos^2 n} =$$

مستوی گیری از انتگرال: $F(n) = \int_{v(n)}^{u(n)} f(t) dt$

$$F'(n) = \underbrace{u'(n)} \cdot f(u(n)) - v'(n) \cdot f(v(n))$$

$$F(t) = \int_{-t}^t \frac{dn}{1+n^{10}} \Rightarrow F'(n) = \left(1 \times \frac{1}{1+t^{10}}\right) - (-1) \left(\frac{1}{1+t^{10}}\right)$$

$$= \frac{2}{1+t^{10}}$$

$$\left(n \times \int_{-n}^n \frac{t}{\sqrt{1+t^2}} \right)' = \left(1 \times \frac{t}{\sqrt{1+t^2}} \right)' + n \times \left(\frac{1}{\sqrt{1+t^2}} \right)' \xrightarrow{n=2}$$

$$0 + 2 \times \frac{2}{\sqrt{9}} = \frac{4}{3}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\int_0^{n^2} \sin \sqrt{t} dt}{n^2} \xrightarrow{HOP} \frac{(2n) \sin n - 0}{2n^2} = \frac{2}{n}$$

$$\xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

انتگرال های غیرعاری (خاصه):

انتگرال هایی که بی نهایت یا هر دو حد انتگرال سری بی نهایت باشد و یا تابع زیر انتگرال در بازه ای بی کران باشد.

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_a^b f(x) dx$$

$$\int_{-\infty}^b f(x) dx = \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^b f(x) dx$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^c f(x) dx + \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_c^b f(x) dx$$

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{b \rightarrow +\infty} \left(\int_0^b \frac{1}{1+x^2} dx \right) = \lim_{b \rightarrow +\infty} \text{Arctg} x \Big|_0^b = \text{Arctg} b - \text{Arctg} 0$$

مثال:
 $\text{Arctg} +\infty = \frac{\pi}{2}$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2 - 4x + 10} = \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^{\sqrt{5}} \frac{1}{(x-2)^2 + 1} dx + \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_{\sqrt{5}}^b \frac{1}{(x-2)^2 + 1} dx =$$

$$\lim_{a \rightarrow -\infty} (\text{Arctg}(x-2)) \Big|_a^{\sqrt{5}} + \lim_{b \rightarrow +\infty} (\text{Arctg}(x-2)) \Big|_{\sqrt{5}}^b =$$

$$\left(0 + \frac{\pi}{2}\right) + \left(\frac{\pi}{2} - 0\right) = \pi$$

کاربردهای انتگرال:

محاسبه حد مجموع به کمک انتگرال معین:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f\left(\frac{i}{n}\right) = \int_0^1 f(x) dx$$

اگر $f(x)$ در $[a, b]$ انتگرال پذیر بود:

مثال: مقدارهای زیر را بیابید.

① $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{n^r+1} + \frac{n}{n^r+2} + \frac{n}{n^r+3} + \dots + \frac{n}{n^r+n} \right)$

$$\frac{n}{n^r+1} = \frac{\frac{1}{n}}{1+\frac{1}{n^r}} = \frac{1}{n} \left(\frac{1}{1+(\frac{1}{n})^r} \right) \Rightarrow i=1$$

$$\frac{n}{n^r+2} = \frac{\frac{1}{n}}{1+\frac{2}{n^r}} = \frac{1}{n} \left(\frac{1}{1+(\frac{2}{n})^r} \right) \Rightarrow i=2$$

$$\dots$$

$$\Rightarrow f\left(\frac{i}{n}\right) = \frac{1}{n} \left[\frac{1}{1+(\frac{i}{n})^r} \right]$$

$$f(x) = \frac{1}{1+x^r}$$

$$\rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f\left(\frac{i}{n}\right) = \int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 \frac{1}{1+x^r} dx = (\text{Arc} + \log) = \left(\frac{0}{r} \right) \dots = \frac{1}{r}$$

② $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left[1 + \sqrt{\frac{n}{n+1}} + \sqrt{\frac{n}{n+2}} + \sqrt{\frac{n}{n+3}} + \dots + \sqrt{\frac{n}{n+r(n-1)}} \right]$

$\frac{n}{n+r} = \frac{1}{1+\frac{r}{n}}$

$$\left[\sqrt{\frac{1}{1+0}} + \sqrt{\frac{1}{1+\frac{1}{n}}} + \sqrt{\frac{1}{1+\frac{2}{n}}} + \dots + \sqrt{\frac{1}{1+\frac{r(n-1)}{n}}} \right]$$

$$\rightarrow f\left(\frac{i}{n}\right) = \sqrt{\frac{1}{1+\frac{r i}{n}}} \rightarrow f(x) = \sqrt{\frac{1}{1+rx}} \Rightarrow \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1+rx}} dx = 2$$

جواب:

$$(۳) \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{r} \left(1 + \cos \frac{n}{r} + \cos \frac{2n}{r} + \dots + \cos \frac{(n-1)n}{r} \right)$$

$$\hookrightarrow \frac{n}{r} \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \left[\cos \frac{0 \times n}{r} + \cos \frac{1 \times n}{r} + \cos \frac{2 \times n}{r} + \dots + \cos \frac{(n-1) \times n}{r} \right]$$

$$\Rightarrow f\left(\frac{i}{n}\right) = \cos \frac{i n}{r} \Rightarrow f(n) = \cos \frac{n}{r}$$

$$\text{جواب: } \frac{n}{r} \int_0^1 \cos \frac{n}{r} x = \frac{n}{r} \times \left(\frac{r}{n} \sin \frac{n}{r} x \right) = 1$$

$$(۴) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n^r}} \left(1 + \sqrt[n]{\frac{r}{n}} + \sqrt[n]{\frac{2r}{n}} + \dots + \sqrt[n]{\frac{n}{n}} \right)$$

$$\hookrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n^r}} + \sqrt[n]{\frac{r}{n}} + \sqrt[n]{\frac{2r}{n}} + \dots + \sqrt[n]{\frac{n}{n}}$$

$$\rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left(\sqrt[n]{\frac{1}{n}} + \sqrt[n]{\frac{r}{n}} + \dots + \sqrt[n]{\frac{n}{n}} \right)$$

$$\rightarrow f\left(\frac{i}{n}\right) = \sqrt[n]{\frac{i}{n}} \rightarrow f(n) = \sqrt[n]{n} \Rightarrow \int_0^1 f(x) = \int_0^1 \sqrt[n]{x} = \frac{n}{n+1} \cdot \frac{n+1}{n} = \frac{n}{n+1}$$

$$(۵) \lim_{n \rightarrow \infty} n \left[\frac{1}{(n+1)^r} + \frac{1}{(n+2)^r} + \dots + \frac{1}{(2n)^r} \right]$$

$$\xrightarrow{\text{تقسیم بر } n} \frac{1}{n} \left[\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^r} + \frac{1}{\left(1+\frac{2}{n}\right)^r} + \dots + \frac{1}{\left(\frac{2n}{n}\right)^r} \right] \Rightarrow f\left(\frac{i}{n}\right) = \frac{1}{\left(1+\frac{i}{n}\right)^r}$$

$$\Rightarrow f(n) = \frac{1}{(1+n)^r} \Rightarrow \int_0^1 \frac{1}{(1+x)^r} = \left(\frac{-1}{1+x} \right) \Big|_0^1 = \frac{1}{r}$$

محاسبه مقدار متوسط توابع:

اگر تابع f در بازه بسته $[a, b]$ پیوسته باشد آنگاه عدد حقیقی c وجود دارد

$$f(c) = \frac{\int_a^b f(x) dx}{b-a} \quad \text{مقدار میانگین}$$

مثال: مقدار متوسط توابع زیر را بیابید.

$$\int_1^{\omega} \frac{n^r-1}{n^r} dn \quad f(n) \rightarrow f(c) = \frac{c^r-1}{c^r} = 1 - \frac{1}{c^r}$$

$$f(c) = \frac{\int_1^{\omega} \frac{n^r-1}{n^r} dn}{\omega-1} = \frac{\int_1^{\omega} \left(1 - \frac{1}{n^r}\right) dn}{\omega-1} = \frac{\left(n + \frac{1}{1-r}\right)_1^{\omega}}{\omega-1} = \frac{\left(\omega + \frac{1}{1-r}\right) - \left(1 + \frac{1}{1-r}\right)}{\omega-1}$$

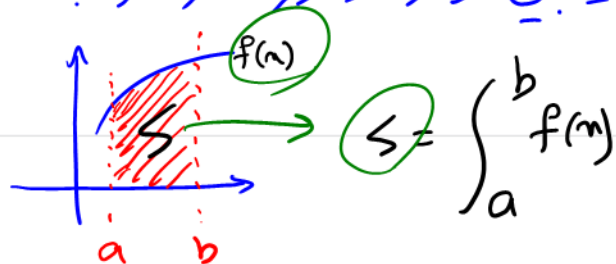
$$\rightarrow f(c) = \frac{c}{\omega} \Rightarrow 1 - \frac{1}{c^r} = \frac{c}{\omega} \Rightarrow \boxed{c = \sqrt[r]{\omega}}$$

$$\int_0^r \frac{1}{e^n+1} \rightarrow f(c) = \frac{\int_0^r \frac{1}{e^n+1} dn}{r-0} = \frac{\int_0^r \frac{e^{-n}}{1+e^{-n}} dn}{r} = \frac{\left(-\ln|1+e^{-n}|\right)_0^r}{r}$$

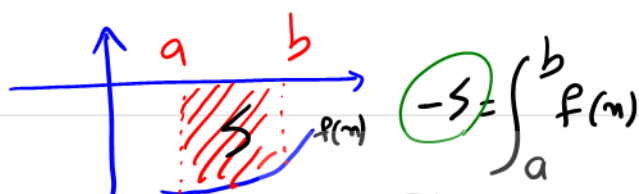
$$\Rightarrow f(c) = \frac{1}{r} \ln\left(\frac{1}{1+e^{-r}}\right) - \frac{1}{r} \ln\left(\frac{1}{1}\right)$$

$$\int \frac{1}{e^n+1} \times \frac{e^{-n}}{e^{-n}} = \int \frac{e^{-n}}{e^{-n}+1}$$

مفهوم انتگرال معین: اگر f یک تابع پیوسته در $[a, b]$ و f و محور x هم‌باز باشد.



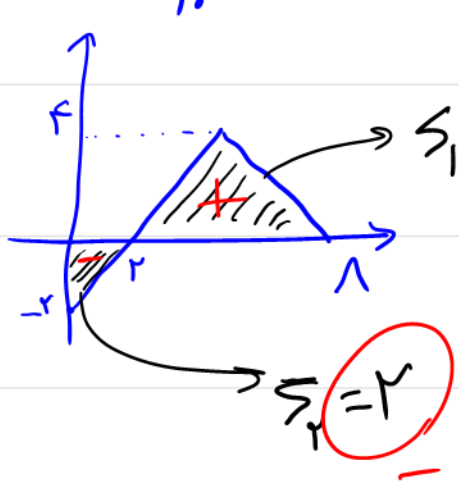
الف) اگر بالای محور x باشد



ب) اگر پایین محور x باشد



مثال: شکل مقابل نمودار تابع f (ست حاصل $\int_a^b f(x) dx$ چقدر است؟)



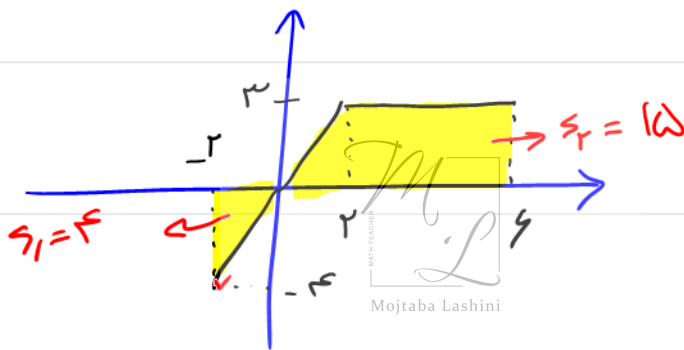
$$\int_0^8 f(x) dx = 12 - 12 = 0$$

هر طاق $\sin ax$ و $\cos ax$ دارای مساحت $\frac{2}{|a|}$ است.

مساحت محصور :

مساحت محصور زیر نمودار $y = f(x)$ در بازه $[a, b]$ برابر است با $\int_a^b |f(x)| dx$

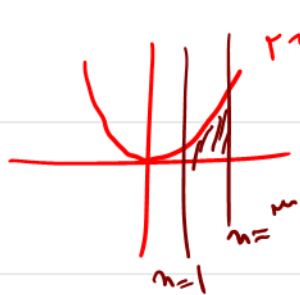
تذکره: سطح محصور همواره مثبت است.



$$\text{مساحت محصور} = 4 + 15 = 19$$

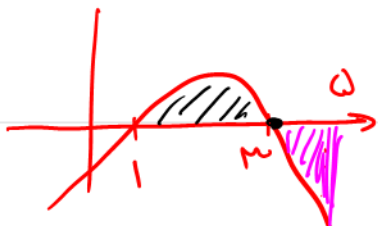
$$\int_{-2}^6 f(x) dx = 15 - 4 = 11$$

مثال: مساحت محدود به $y = x^2$ و خط های $x=1$ و $x=3$ ، محور طول ها را



$$\int_1^3 x^2 dx = \frac{x^3}{3} \Big|_1^3 = 11 - \frac{1}{3}$$

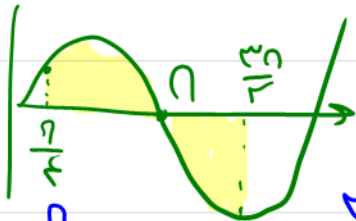
مثال: مساحت محدود به منحنی $y = -x^2 + 4x - 3$ و محور $x=1$ و $x=3$ ها و خط های



$x=1$ و $x=3$ را بیا ببینیم.

$$\left(-\frac{x^3}{3} + \frac{4x^2}{2} - 3x \right) \Big|_1^3 + \left| \int_1^3 (-x^2 + 4x - 3) dx \right|$$

مثال: سطح محصور بین $y = \sin n$ و محور n ها در بازه $[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$

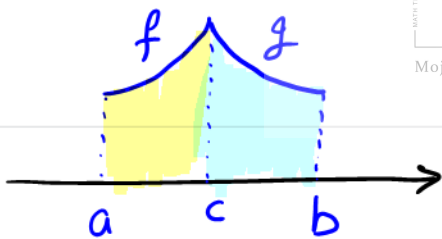


رابطه پیدا.

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \sin n \, dn + \left| \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \sin n \, dn \right| = -\cos n \Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} + \left| -\cos n \Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \right| =$$

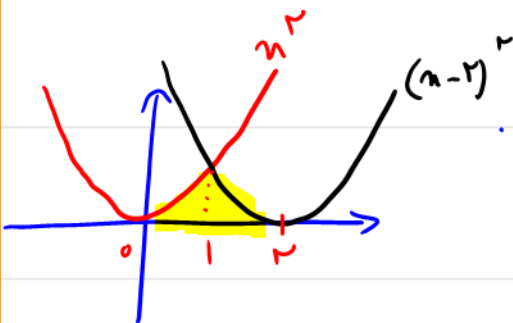
$$(1 + \frac{\sqrt{2}}{2}) + |(0 - 1)| = 2 + \frac{\sqrt{2}}{2}$$

سطح محصور حاصل از دو تابع:



Mojtaba Lashini

$$S = \left| \int_a^c f(n) \, dn \right| + \left| \int_c^b g(n) \, dn \right|$$



مثال: مساحت ناحیه هاشور خوره رابطه $y = n^2$

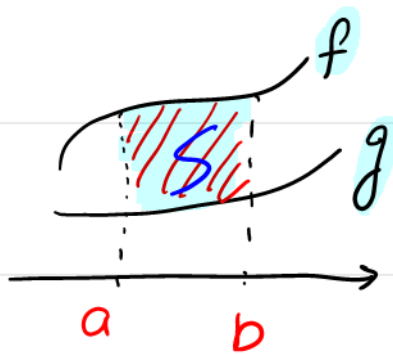
$$\int_0^1 n^2 \, dn + \int_1^2 (n-2)^2 \, dn = \frac{n^3}{3} \Big|_0^1 - \frac{(n-2)^3}{3} \Big|_1^2 = \left(\frac{1}{3}\right) + \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

مساحت ناحیه محدود به منحنی $y = e^{-n}$ و خط $y = 3n$ و محور n ها در ناحیه اول چقدر است.



$$\int_0^1 3n \, dn + \int_1^2 (e^{-n} - n^2) \, dn =$$

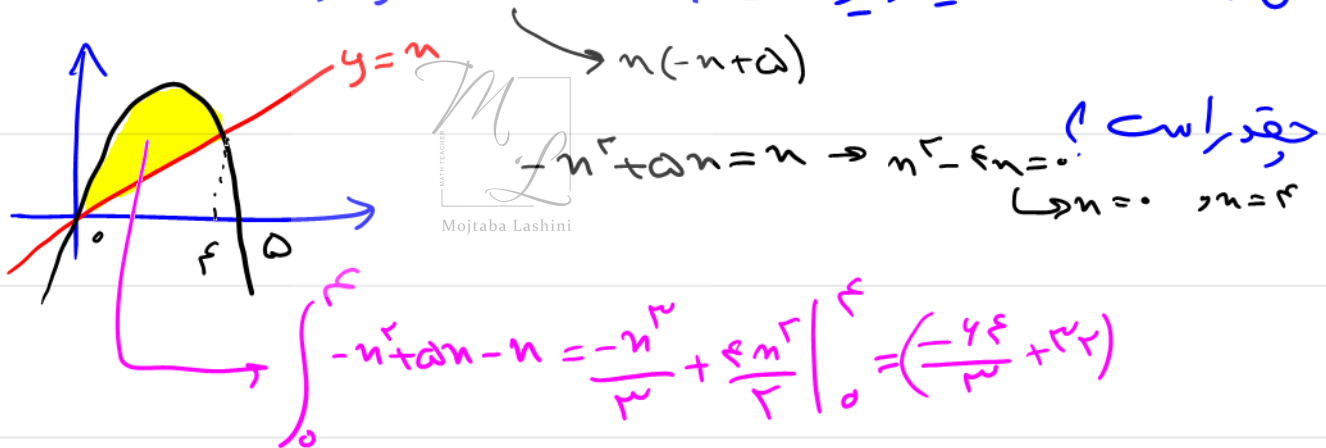
$$\frac{3n^2}{2} \Big|_0^1 + \left(e^{-n} - \frac{n^3}{3} \right) \Big|_1^2 = \frac{3}{2} + \left(1 - \frac{1}{3} \right) - \left(e^{-1} - \frac{1}{3} \right)$$



مساحت محصور بین دو منحنی :

$$S = \left| \int_a^b (f(x) - g(x)) dx \right|$$

مثال: مساحت ناحیه زیر منحنی به معادله $y = -x^2 + 4x$ و بالای خط $y = x$



مثال: سطح محدود به دو منحنی $y = x^2 - 1$ و $y = x^2 - x^3$ و محور و هاجدرا؟

$x = 0$

$$x^2 - x^3 = x^2 - 1 \rightarrow x^3 - 1 = 0 \rightarrow x = 1$$

$$\left| \int_0^1 (x^2 - 1 - (x^2 - x^3)) dx \right| = \left. \frac{x^4}{4} - x \right|_0^1 = \left(\frac{1}{4} - 1 \right) = \frac{3}{4}$$

مثال: مساحت ناحیه محدود بین $f(n) = n^2 + 3n + 5$ و $g(n) = -n^2 + 5n + 9$ و در خط

$n = -1$ و $n = 4$ چقدر است؟

$$n^2 + 3n + 5 = -n^2 + 5n + 9 \Rightarrow 2n^2 - 2n - 4 = 0 \quad \begin{matrix} n = -1 \\ n = 4 \end{matrix}$$

$$\left| \int_{-1}^4 (2n^2 - 2n - 4) dn \right| = \frac{25}{3}$$

محاسبه حجم :

① حجم حاصل از دوران تابع $y = f(n)$ حول محور n ها در بازه $[a, b]$

$$V = \pi \int_a^b f(n)^2 dn$$

② حجم حاصل از دوران ناحیه محدود بین $f(n)$ و $g(n)$ و در خط $n = a$ و $n = b$ حول محور n :

$$V = \pi \int_a^b |f(n)^2 - g(n)^2| dn$$

③ حجم حاصل از دوران ناحیه محدود بین $f(n)$ و $g(n)$ و در خط $n = a$ و $n = b$ حول محور y ها :

$$V = 2\pi \int_a^b n |f(n) - g(n)| dn$$

مثال ۲: حجم حاصل از دوران $y = \sin x$ حول محور x در فاصله $[0, \frac{\pi}{2}]$ چقدر است؟

$$V = \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \, dx = \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 - \cos 2x}{2} \, dx = \frac{\pi}{2} \left(x - \frac{\sin 2x}{2} \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi^2}{4}$$

مثال ۳: حجم حاصل از دوران سطح بین $y = x^2$ و خط $y = x$ حول محور x چقدر است؟

$$x^2 = x \rightarrow x = 0, x = 1$$

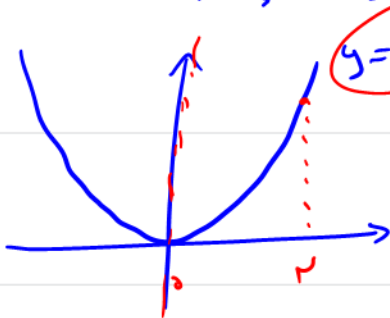
$$\Rightarrow V = \pi \int_0^1 (x - x^2) \, dx = \frac{\pi}{15}$$

$$\left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_0^1 = \frac{1}{6} - \frac{1}{3} = -\frac{1}{6}$$

چقدر است؟



مثال ۴: حجم حاصل از دوران شکل مقابل حول محور y چقدر است؟



$x=0$

$$f(x) = x^2$$

$$g(x) = 0$$

$$\rightarrow \pi \int_0^2 x^4 \, dx = \pi \left(\frac{x^5}{5} \right) \Big|_0^2 = \frac{32\pi}{5}$$

$$\pi \int_0^2 x^4 \, dx = \frac{\pi x^5}{5} \Big|_0^2 = \frac{32\pi}{5}$$

مسئله طول قوس منحنی :

اگر f در $[a, b]$ پیوسته و در (a, b) مشتق پذیر باشد برای محاسبه طول منحنی

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx$$

$f(x)$ در فاصله $x=a$ تا $x=b$ داریم :

مثال: طول قوس منحنی $y = \sqrt{1-x^2}$ از $x=0$ تا $x=1$ چقدر است؟

$$y = \sqrt{1-x^2} \rightarrow y' = \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}} \rightarrow (y')^2 = \frac{x^2}{1-x^2}, \quad 1 + (y')^2 = \frac{1}{1-x^2}$$

$\rightarrow 1 + \frac{x^2}{1-x^2}$

$$\rightarrow L = \int_0^1 \sqrt{\frac{1}{1-x^2}} dx = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \text{Arcsin } x \Big|_0^1 = \underbrace{\text{Arcsin } 1}_{\frac{\pi}{2}} - \underbrace{\text{Arcsin } 0}_0 = \frac{\pi}{2}$$





آموزش ریاضی عمومی ۱

بامهندس
مجتبی لاشینی

ویژه تمامی رشته های دانشگاهی

mojtabalashini 

m-lashini.ir 

mojtabalashini.riazi 

۰۹۱۹۹۳۶۲۷۱۷ 

تعریف مشتق در یک نقطه: فرض کنید $y = f(x)$ روی فاصله (a, b) معین و در نقطه $x_0 \in (a, b)$ پیوسته باشد تابع f در نقطه x_0 مشتق پذیر است اگر حد زیر وجود داشته باشد.

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

تذکره: $f'(x_0)$ شیب خط مماس به نمودار $f(x)$ را در نقطه x_0 نشان می دهد.

مشتق پذیری: تابع در یک نقطه مشتق پذیر است هرگاه اولاً در آنجا پیوسته باشد و دوماً مشتق راست و مشتق چپ در آنجا برابر باشد.

$$f'_-(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \quad \text{مشتق چپ}$$

$$f'_+(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \quad \text{مشتق راست}$$

تذکره: اگر تابعی در یک نقطه ناپیوسته باشد، مشتق ناپذیر است.

نقطه بازگشت: هرگاه تابع f در نقطه x_0 پیوسته و مشتقات چپ و راست

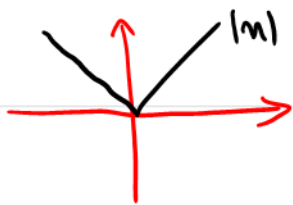
در x_0 نامتناهی $(-\infty \text{ یا } +\infty)$ و با علامت مخالف باشند نقطه بازگشتی است.



تذکره: اگر هر دو مشتق چپ و راست به ابر صه + یا صه - برسد آن نقطه نقطه n متعلق به

دامنه نقطه عطف خوانده شود. $(\sqrt[3]{n} = 0)$

نقطه زاویه دار: در این نقطه حداقل یکی از مشتقات چپ و راست متناهی است.



ولی مقدارشان باهم برابر نیست.

مثال: در تابع باضابطه $f(n) = \begin{cases} n+a & n \leq 1 \\ b\sqrt[n]{n} & n > 1 \end{cases}$ مقدار $f'(1)$ موجود است. مقدار $\frac{2b-a}{3}$ را حساب کنید.

مثال: وضعیت مشتق پذیری تابع $f(n) = \begin{cases} n \sin \frac{1}{n} & n \neq 0 \\ 0 & n = 0 \end{cases}$ را مشخص کنید.

قواعد مشتق پذیری:

$$① \quad y = x^n \longrightarrow y' = n x^{n-1}$$

$$② \quad y = \sqrt[n]{x^m} \longrightarrow y' = \frac{m}{n} x^{\frac{n-m}{n}}$$

$$③ \quad y = \sin x \longrightarrow y' = \cos x$$

$$④ \quad y = \cos x \longrightarrow y' = -\sin x$$

$$⑤ \quad y = \tan x \longrightarrow y' = 1 + \tan^2 x$$

$$⑥ \quad y = \cot x \longrightarrow y' = -1 - \cot^2 x$$

$$⑦ \quad y = e^x \longrightarrow y' = e^x$$

$$⑧ \quad y = a^x \longrightarrow y' = a^x \ln a$$

$$⑨ \quad y = \log_a x \longrightarrow y' = \frac{1}{x} \log_a e$$

$$⑩ \quad y = \ln x \longrightarrow y' = \frac{1}{x}$$

$$(11) \quad y = \text{Arc sin } \odot \longrightarrow y' = \frac{\odot'}{\sqrt{1-\odot^2}} \quad |\odot| < 1$$

$$(12) \quad y = \text{Arc cos } \odot \longrightarrow y' = \frac{-\odot'}{\sqrt{1-\odot^2}} \quad |\odot| < 1$$

$$(13) \quad y = \text{Arc tg } \odot \longrightarrow y' = \frac{\odot'}{1+\odot^2}$$

$$(14) \quad y = \text{Arc cot } \odot \longrightarrow y' = \frac{-\odot'}{1+\odot^2}$$

$$(15) \quad y = \sinh \odot \longrightarrow y' = \odot' \cosh \odot$$

$$(16) \quad y = \cosh \odot \longrightarrow y' = \odot' \sinh \odot$$

$$(17) \quad y = \text{tgh } \odot \longrightarrow y' = \odot' (1 - \text{tgh}^2 \odot)$$

$$(18) \quad y = \text{coth } \odot \longrightarrow y' = \odot' (1 - \text{coth}^2 \odot)$$

$$(19) \quad y = \text{Arc sinh } \odot \longrightarrow y' = \frac{\odot'}{\sqrt{1+\odot^2}}$$

$$(20) \quad y = \text{Arc cosh } \odot \longrightarrow y' = \frac{\odot'}{\sqrt{\odot^2 - 1}}$$

$$(21) \quad y = \text{Arc tgh } \odot \longrightarrow y' = \frac{\odot'}{1-\odot^2}$$

$$(22) \quad y = \text{Arc coth } \odot \longrightarrow y' = \frac{\odot'}{1-\odot^2}$$

$$(۲۳) \quad y = u \cdot v \longrightarrow y' = u'v + uv'$$

$$(۲۴) \quad y = \frac{u}{v} \longrightarrow y' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

$$(۲۵) \quad y = \frac{a \cdot u + b}{c \cdot u + d} \longrightarrow y' = \frac{ad - bc}{(c \cdot u + d)^2} \cdot u'$$

مثال: مشتق بگیرید.

$$(۱) \quad y = \sin(n^x \cdot \ln n)$$

$$(۲) \quad y = \sin^n n$$

$$(۳) \quad y = (\ln n)^r$$

$$(۴) \quad y = \ln(\sin n)$$

$$(۵) \quad y = \sin(e^n)$$

$$(۶) \quad y = \operatorname{tg}^r(n^x + a)$$

$$(۷) \quad y = \operatorname{Arc} \operatorname{tg}(\sin n)$$

$$(۸) \quad y = \sqrt{\cos^n n}$$

$$(9) \quad y = \sqrt{\sin(e^n)}$$

$$(10) \quad y = \ln^5(1 + 9^n)$$

$$(11) \quad y = \text{Arc} \cos \sqrt{n}$$

$$(12) \quad y = \sinh\left(\frac{n}{r}\right) + \cosh\left(\frac{n}{r}\right)$$

$$(13) \quad y = e^n (\cos n + \sin n)$$

$$(14) \quad y = (3 - 2 \sin n)^5$$

$$(15) \quad y = \frac{(7 \sin n + 1)}{(\cos n + 3)}$$

مشتق گیری ضمنی :

$$y'_n = - \frac{\text{مشتق نسبت به } n \text{ با فرضی و به عنوان عدد ثابت}}{\text{مشتق نسبت به } y \text{ با فرضی } n \text{ به عنوان عدد ثابت}}$$

$$(1) \quad y - n^2 y + n y - 1 = 0$$

$$② \quad y + \sin(ny) + \cos(ny) = 0$$

$$③ \quad \text{Arctg } y - y + n = 0$$

مشتق ترکیب تابع:

$$f \circ g(n) \xrightarrow{\quad} g'(n) \times f'(g(n))$$

$$f(\textcircled{n}) \xrightarrow{\quad} \textcircled{n}' \times f'(\textcircled{n})$$

مثال: اگر $f'(2) = -\frac{2}{3}$ باشد مقدار مشتق $f(\sqrt{1-3n})$ برای $n = -1$ کدام است؟

مشتق توابع شامل قدر مطلق :

$$y = |x| \rightarrow y' = \frac{x}{|x|}$$

مثال : مشتق تابع $y = |x^3 - 2x|$ را در نقطه $x = 1$ به دست آورید.

$$\begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) \end{cases} \rightarrow y'_x = \frac{g'(t)}{f'(t)}$$

مشتق منحنی های پارامتری :

مثال : مشتق منحنی زیر را بیابید.

$$\begin{cases} x = 1 - \cos t \\ y = 1 + \frac{1}{t} \sin t \end{cases}$$

حامله زنجیره ای مشتق :

$$\frac{dy}{dn} = \frac{dy}{du} \times \frac{du}{dn}$$

مثال: اگر $y = \sqrt{u^2 + u}$ و $u = n^3 - 2n$ ، $\frac{dy}{dn}$ را در نقطه $n=2$ بیابید.

$$y = \frac{1}{an+b} \rightarrow y^{(n)} = \frac{(-1)^n \times a^n \times n!}{(an+b)^{n+1}}$$

مشتق مرتبه n ام :

$$y = \cos an \rightarrow y^{(n)} = a^n \cos\left(\frac{n\pi}{2} + an\right)$$

$$y = \sin an \rightarrow y^{(n)} = a^n \sin\left(\frac{n\pi}{2} + an\right)$$

تذکره : برای مشتق بدالت ابتدا آن را تقسیم عددی کنیم.

مشتق تابع معکوس :

$$(f^{-1})'(b) = \frac{1}{f'(a)}$$

مثال: اگر $f(x) = x^3 + x^2$ باشد، مقدار مشتق تابع معکوس در نقطه ای به عددی (۲)

$$(f^{-1})'(12) = \frac{1}{f'(2)} = \frac{1}{14}$$

واقع بر آن چقدر است ؟

مشتق عامل قدرگذاشته :

مثال: اگر $f(x) = \frac{x}{3} (x-2)(x-2)(x-2)$ باشد، $f'(2)$ چقدر است ؟

مشتق توابع به شکل $y = u^v$:

$$y' = u^v \left[v \cdot \ln u + \frac{u'v}{u} \right]$$

$$y = \left[(\sin x)^{\cos x} \right]_{x=\frac{\pi}{2}} \rightarrow$$

مشتق در ضمیمه : $\text{سرعت } x' \rightarrow \text{مسافت } x$

کاربرد مشتق:

$$\text{آهن تغییر لحظه‌ای} = f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

$$\text{آهن تغییر متوسط در بازه } [a, b] = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

مثال: در تابع با ضابطه $f(t) = 2 + t^2$ آهن آنی در لحظه $t = 2$ مقدار آهن متوسط f از لحظه $t = 1$ تا $t = 3$ کمتر است؟

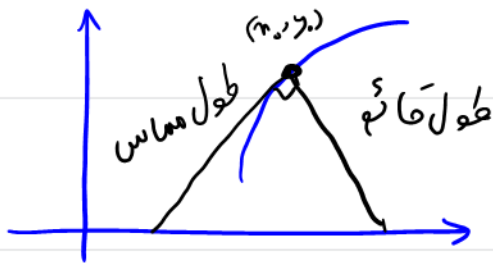
مثال: سرعت متوسط مسیری، که تحت رابطه $s = t^2 - 5t + 2$ حرکت می‌کند از $t_1 = 5$ ثانیه تا $t_2 = 15$ ثانیه چقدر است؟

معادله خط مماس وقائم بر یک منحنی در نقطه (n_0, y_0) : اگر $m = f'(n_0)$

$$y - y_0 = m(n - n_0) \quad \text{قائم} \quad y - y_0 = -\frac{1}{m}(n - n_0)$$

مثال: معادله خط مماس بر منحنی $y = \sqrt{n+1}n$ در نقطه $n=1$ را بنویسید.

مثال: معادله خط مماس بر منحنی $n^2y^2 + n - y - 1 = 0$ در نقطه $(1, 1)$ را بنویسید.



طول مماس و طول قائم:

$$L = \sqrt{y_0^2 + \left(\frac{y_0}{m}\right)^2} \quad \text{طول مماس}$$

$$L = \sqrt{y_0^2 + (y_0 \times m)^2} \quad \text{طول قائم}$$

مثال: طول مماس بر منحنی $y = n^2 - 3n + 2$ در نقطه $(2, 4)$ را بنویسید.

سوال نکته داره نمودار $y = \frac{n^3 - 1}{\sqrt{3}}$ محور n ها را با چه زاویه ای قطع می کند؟

اگر در نمودار $f(n) = n^3 - 2n^2$ و $g(n) = an^2 + b$ در نقطه ای به طول ۲- برهم مناس باشند.

چقدر است؟

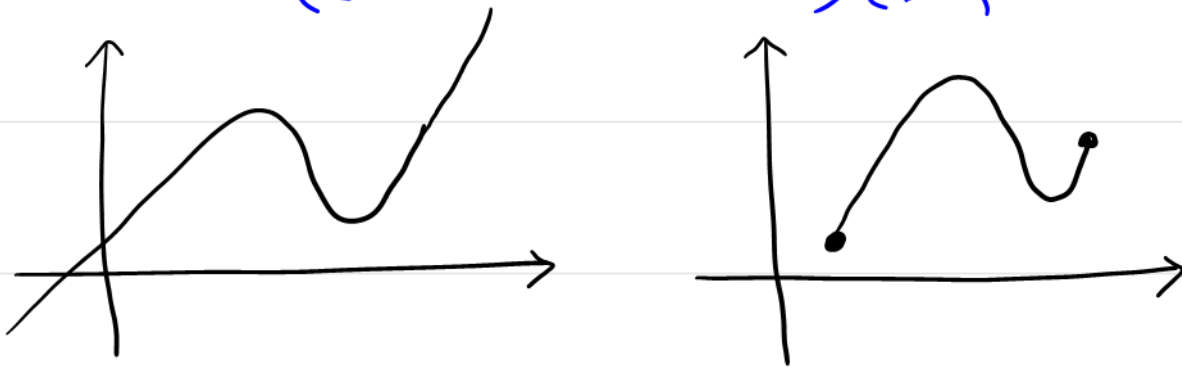
زاویه بین دو منحنی: ابتدا دو منحنی را با هم تلامح می دهیم تا طول نقطه تلامح

بدست آید سپس از y منحنی در آن نقطه مشتق گرفته و m و m' می نامیم و

در رابطه $\tan \alpha = \left| \frac{m - m'}{1 + mm'} \right|$ می گذاریم و α را می یابیم.

مثال: دو منحنی $y = x^2$ و $y = x^3$ تحت چه زاویه ای یکدیگر را قطع می کنند؟

نقاط السّـم تابع (نقاط $\min, \max$ تابع)



روش پیدا کردن $\min$ و $\max$ نی به کمک مشتق:

ابتدا از تابع مشتق می گیریم و آن را تعیین علامت می کنیم و هر جا $\boxed{+ \ 0 \ -}$ داریم

نقطه $\max$ است و هر جا $\boxed{- \ 0 \ +}$ داریم نقطه $\min$ است.

مثال: طول نقاط السّـم تابع $f(x) = x^3 - 3x + 2$ و را بیا یابیم.

آزمون مشتق دوم برای تعیین نقاط انحناء تابع :

فرض کنیم برای تابع $y = f(x)$ و نقطه‌ای مانند وجود داشته باشد که $f'(c)$ و $f''(c)$ موجود باشد.

الف) اگر $f'(c) < 0$ آنگاه تابع f در نقطه c مانند می‌باشد.

ب) اگر $f'(c) > 0$ آنگاه تابع f در نقطه c مینیمم می‌باشد.

پ) اگر $f'(c) = 0$ باشد از این آزمون نتیجه‌ای نمی‌توانیم بگیریم!!

مثال: نوع انحناء هم‌های نبی تابع $f(x) = x^3 - 3x^2$ را بیابید.

مثال: نقطه $x = -3$ برای تابع $f(x) = 2x^3 + 9x^2 - 18x$ چه نوع نقطه‌ای است؟

تعین نقاط $\min$ و $\max$ مطلق تابع:

برای تعین نقاط $\min$ و $\max$ مطلق تابع $y = f(x)$ در فاصله $[a, b]$ به ترتیب زیر عمل می‌کنیم

۱- نقاط بحرانی (جایی که مشتق صفر است یا وجود ندارد) را به دست آورده و مقدار تابع را حساب می‌کنیم.

۲- مقدار تابع در نقاط $[a, b]$ را به دست می‌آوریم.

۳- بین این اعداد بزرگترین $\max$ مطلق و کوچکترین $\min$ مطلق است.

مثال: نقاط $\min$ و $\max$ مطلق و محلی تابع $y = n^3 - 3n^2$ را در بازه $[0, 2]$ به دست آوریم.

مثال: مینیمم عبارت $n^3 - 3n^2$ چقدر است؟

تعیین صعودی و نزولی بودن به کمک مشتق :

فرض کنید f تابعی باشد که در فاصله بسته $[a, b]$ پیوسته و در فاصله (a, b) مشتق پذیر باشد آنگاه :

- ۱- اگر برای هر x در بازه (a, b) $f'(x) > 0$ ، تابع در $[a, b]$ اکیداً صعودی است.
- ۲- اگر برای هر x در بازه (a, b) $f'(x) < 0$ ، تابع در $[a, b]$ اکیداً نزولی است.
- ۳- اگر $f'(x) = 0$ باشد f در تمام نقاط $[a, b]$ ثابت است.

همانگونه که گفتیم : فرض کنید تابع f در همسایگی نقطه c مشتق اول و دوم دارد.

اگر $f''(c) > 0$ ، f تقعر رو به بالاست. $\uparrow$

اگر $f''(c) < 0$ ، f تقعر رو به پایین است. $\downarrow$

نقطه عطف: نقطه $(c, f(c))$ را نقطه عطف تابع f می‌نامند هرگاه:

۱. مشتق اول وجود داشته باشد. ۲. مشتق دوم تغییر علامت دهد.

مثال: نقطه عطف $1 - \frac{x^5}{5} + \frac{x^3}{3}$ را بیابید.

مثال: اگر جهت تغییر منحنی $f(x) = x^3 + 2ax^2 + a$ در $x=1$ عوض شود.

مقدار a را بیابید.

توابع همودرافیک: $y = \frac{an+b}{cn+d}$



آموزش ریاضی عمومی ۱

بامهندس
مجتبی لاشینی

ویژه تمامی رشته های دانشگاهی

riaziT

mojtabalashini ▶

m-lashini.ir 

mojtabalashini.riazi 

۰۹۱۹۹۳۶۲۷۱۷ 

اعداد مختلط :

هر عدد مختلط به صورت $Z = x + iy$ نوشته می شود که در آن x و y
 $Z = 3 + 4i$

اعداد حقیقی و $i = \sqrt{-1}$ است. $i^2 = -1 \rightarrow i = \sqrt{-1}$

$x = \text{Re } Z$
قسمت حقیقی
 $x = 3$

$y = \text{Im } Z$
قسمت موهومی
 $y = 4$

$|Z| = \sqrt{x^2 + y^2}$
اندازه عدد مختلط
 $|Z| = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$

$\bar{Z} = x - iy$
مزدوج عدد مختلط
 $\bar{Z} = 3 - 4i$

$Z_1 = x_1 + iy_1$
 $Z_1 = 2 + 5i$

$Z_2 = x_2 + iy_2$
 $Z_2 = 3 + 4i$

اعمال حسابی در اعداد مختلط :

① $Z_1 + Z_2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)$ $Z_1 + Z_2 = 5 + 9i$

② $Z_1 - Z_2 = (x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2)$ $Z_1 - Z_2 = -1 + 1i$

③ $Z_1 Z_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + x_2 y_1)$ $Z_1 Z_2 = (2 - 20) + i(1 + 15)$
 $= -18 + 16i$

$\bar{Z}_1 = 2 - 5i$ ✓ $\bar{Z}_2 = 3 - 4i$ ✓
 $Z_1 = 2 + 5i$ $Z_2 = 3 + 4i$

سایر نکات: (مزدوج)

④ $\overline{Z_1 + Z_2} = \bar{Z}_1 + \bar{Z}_2$

⑤ $\overline{Z_1 - Z_2} = \bar{Z}_1 - \bar{Z}_2$

⑥ $\overline{Z_1 Z_2} = \bar{Z}_1 \cdot \bar{Z}_2$

⑦ $\overline{\left(\frac{Z_1}{Z_2}\right)} = \frac{\bar{Z}_1}{\bar{Z}_2}$

$$|z| = \sqrt{4+9} = \sqrt{13}$$

$$\textcircled{9} \quad z \bar{z} = |z|^2 = 13$$

$$(2+3i)(2-3i) = 4 - 9i + 6i + 9 = 13$$

$$\textcircled{9} \quad |z_1 z_2| = |z_1| |z_2|$$

$$\textcircled{10} \quad \left| \frac{z_1}{z_2} \right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$$

$$\textcircled{11} \quad |z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$$

$$\textcircled{12} \quad \operatorname{Re} z = \frac{z + \bar{z}}{2}$$

$$\textcircled{13} \quad \operatorname{Im} z = \frac{z - \bar{z}}{2i}$$

مثال: حاصل $A = (1+2i)(2+i)$ را بدست آورید.

$$(1+2i)(2+i) = 2 + i + 4i + (-2) = 5i$$

$$\text{فرضی: } (2-2) + i(1+4) = 5i$$

نکته: برای محاسبه عبارت را در مزدوج z_2 ضرب و جمع می‌کنیم.

مثال: حاصل $A = \frac{1+\sqrt{3}i}{\sqrt{3}-i}$ را بیابید.

$$\frac{1+\sqrt{3}i}{\sqrt{3}-i} \times \frac{\sqrt{3}+i}{\sqrt{3}+i} = \frac{(\sqrt{3}-\sqrt{3})+i(1+\sqrt{3})}{(\sqrt{3}+1)+i(\sqrt{3}-\sqrt{3})} = \frac{1+i\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}} = i$$

مثال: حاصل $A = \frac{1}{(1+i)(2+i)(3+i)}$ را بیابید.

$$A = \frac{1}{(1+3i)(3+1i)} = \frac{1}{(3-3)+i(1+9)} = \frac{1}{10i} \times \frac{-10i}{-10i} = \frac{-10i}{100} = \frac{-i}{10}$$

$$i^2 = -1$$

مثال: انداز ۵

$$\frac{i^{34} - i^{27}}{i^{14} - i^{13} + i^5}$$
 حقد راست؟

$$\frac{(i^2)^{17} - (i^2)^{13} i}{(i^2)^{7} - (i^2)^6 + (i^2)^2 i} = \frac{(-1)^{17} - (-1)^{13} i}{(-1)^7 - (-1)^6 + (-1)^2 i} = \frac{1+i}{-1-1+i} = \frac{1+i}{-2+i} \times \frac{-i}{-i} = \frac{1-i}{-1-i}$$

شکل قطبی اعداد مختلط:

هر عدد مختلط $z = x + iy$ را می‌توان به شکل $z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$ نوشت.

که به آن شکل قطبی عدد مختلط می‌گویند داریم:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \theta = \tan^{-1} \frac{y}{x}$$

آرگومان z

مثال: شکل قطبی اعداد مختلط زیر را بنویسید.

$$\theta = \frac{\pi}{4}$$

الف) $z = 1 + i$
 $r = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$, $\tan \theta = 1 \rightarrow \theta = \tan^{-1} 1 = \frac{\pi}{4}$
 $z = \sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right)$

ب) $z = 1 - \sqrt{3}i$
 $r = \sqrt{1+3} = 2$, $\tan \theta = \frac{-\sqrt{3}}{1} = -\sqrt{3}$
 $\theta = \frac{5\pi}{6}$ (چون $\theta = \frac{2\pi}{3}$ در ربع دوم است و این در ربع چهارم است)

$$z = 2 \left(\cos \left(\frac{5\pi}{6} \right) + i \sin \left(\frac{5\pi}{6} \right) \right)$$



ب) $z = -1 - i$
 $r = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$, $\tan \theta = \frac{-1}{-1} = 1 \rightarrow \theta = \frac{5\pi}{4}$
 $z = \sqrt{2} \left(\cos \frac{5\pi}{4} + i \sin \frac{5\pi}{4} \right)$

شکل نمایی عدد مختلط :

با استفاده از فرمول $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$ هر عدد مختلط به شکل قطبی

می توان نوشت که آن را هم غایی گویند. $z = r e^{i\theta}$ را به فرم $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$

مثال : عدد مختلط $z = 2e^{\frac{\pi}{3}i}$ را به فرم دکارتی بنویسید.
 $\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}$

$$z = 2(\underbrace{\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}}_{\text{قطبی}}) = 2\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \boxed{1 + i\sqrt{3}}$$

ضرب و تقسیم اعداد مختلط به فرم قطبی یا نمایی :

برای جمع و تفریق فرم دکارتی راحت است و برای ضرب و تقسیم فرم قطبی یا نمایی !

$$\textcircled{1} \frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\theta_1 - \theta_2)}$$

$$\textcircled{2} z_1 z_2 = r_1 r_2 e^{i(\theta_1 + \theta_2)}$$

مثال : اگر $z_1 = \cos\frac{\pi}{5} + i\sin\frac{\pi}{5}$ با $z_2 = \cos\frac{\pi}{5} - i\sin\frac{\pi}{5}$ باشد مقدار $\frac{z_1^4}{z_2}$ چقدر است ؟
 $\hookrightarrow e^{i\frac{\pi}{5}}$ $\hookrightarrow e^{-i\frac{\pi}{5}}$

$$\frac{(z_1)^4}{z_2} = \frac{(e^{i\frac{\pi}{5}})^4}{e^{-i\frac{\pi}{5}}} = \frac{e^{i\frac{4\pi}{5}}}{e^{-i\frac{\pi}{5}}} = e^{i\pi} = \cos\pi + i\sin\pi = \boxed{-1}$$

توان یک عدد مختلط: برای به توان رساندن یک عدد مختلط بهتر است آن را

به شکل قطبی یا نمایی بنویسیم سپس آن را به توان برسانیم

$$z^n = (r e^{i\theta})^n = r^n e^{in\theta} = r^n (\cos n\theta + i \sin n\theta)$$

$$(r e^{i\frac{\pi}{4}})^3 = 1 e^{i\frac{3\pi}{4}} = 1 (\cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4})$$

مثال: مقدار $(1+i)^{10}$ را بدست آورید.

$$(1+i)^{10} = (\sqrt{2} e^{i\frac{\pi}{4}})^{10} = (\sqrt{2})^{10} e^{i\frac{10\pi}{4}} = 32 (\cos \frac{5\pi}{2} + i \sin \frac{5\pi}{2}) = 32i$$

$$\rightarrow r = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$$

$$\rightarrow \tan \theta = \frac{1}{1} = 1 \rightarrow \theta = \frac{\pi}{4}$$

مثال: مقدار $(2+2\sqrt{3}i)^5$ را بدست آورید.

$$r = \sqrt{4+12} = 4, \tan \theta = \frac{2\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3} \rightarrow \theta = \frac{\pi}{3}, z = 4 e^{i\frac{\pi}{3}}$$

$$z^5 = (4 e^{i\frac{\pi}{3}})^5 = 4^5 e^{i\frac{5\pi}{3}} = 1024 (\cos \frac{5\pi}{3} + i \sin \frac{5\pi}{3}) = 1024 (\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}) = 512 - 512\sqrt{3}i$$

$$\cos \frac{5\pi}{3} = \cos (2\pi - \frac{\pi}{3}) = \cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$$

$$\sin \frac{5\pi}{3} = \sin (2\pi - \frac{\pi}{3}) = -\sin \frac{\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

تکانه: اگر n عدد طبیعی باشد.

$$(1+i)^n = 2^{\frac{n}{2}} (\cos \frac{n\pi}{4} + i \sin \frac{n\pi}{4}) \text{ و } (\sqrt{3}-i)^n = 2^{\frac{n}{2}} (\cos \frac{n\pi}{4} - i \sin \frac{n\pi}{4})$$

$$(1+i)^{200} = 2^{100} (\cos 50\pi + i \sin 50\pi) = 2^{100} (1 + i0) = 2^{100}$$

ریشه یک عدد مختلط: $(\sqrt[n]{z})$ دارای n جواب است.

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r} e^{i \left(\frac{\theta + 2k\pi}{n} \right)} = \sqrt[n]{r} \left[\cos \left(\frac{2k\pi + \theta}{n} \right) + i \sin \left(\frac{2k\pi + \theta}{n} \right) \right], k=0, \dots, n-1$$

$$\sqrt[m]{z} = \sqrt[m]{r} e^{i \left(\frac{\theta + 2k\pi}{m} \right)}$$

مثال: ریشه سوم عدد مختلط $z=1i$ را بنویسید.

$\hookrightarrow r=1, \tan \theta = \frac{1}{0} = \infty \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{2}$

$$z=1i=1e^{i\frac{\pi}{2}}$$

$$\hookrightarrow \sqrt[3]{z} = \sqrt[3]{1} e^{i \left(\frac{\frac{\pi}{2} + 2k\pi}{3} \right)} = \sqrt[3]{1} \left[\cos \left(\frac{2k\pi + \frac{\pi}{2}}{3} \right) + i \sin \left(\frac{2k\pi + \frac{\pi}{2}}{3} \right) \right]$$

$$\xrightarrow{k=0} \sqrt[3]{z} = 1 \left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right) = 1 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i \right) = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$$

$$\xrightarrow{k=1} \sqrt[3]{z} = 1 \left(\cos \frac{5\pi}{6} + i \sin \frac{5\pi}{6} \right) = 1 \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i \right) = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$$



$$\xrightarrow{k=2} \sqrt[3]{z} = 1 \left(\cos \frac{7\pi}{6} + i \sin \frac{7\pi}{6} \right) = 1 \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i \right) = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$$

مثال: حاصل $z = \sqrt{1+\sqrt{3}i}$ را بنویسید. ریشه دوم مثبت:

$$r = \sqrt{1+3} = 2, \tan \theta = \frac{\sqrt{3}}{1} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{3}$$

$$1+\sqrt{3}i = 2e^{i\frac{\pi}{3}} \rightarrow \sqrt{2e^{i\frac{\pi}{3}}} = \sqrt{2} e^{i \left(\frac{2k\pi + \frac{\pi}{3}}{2} \right)}$$

$$\xrightarrow{k=0} z = \sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right) = \sqrt{2} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i \right) = \frac{\sqrt{6}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i$$

جواب:

$$\ln(z) = \ln(re^{i\theta}) = \ln r + \ln e^{i\theta} = \ln r + i\theta$$

$$r + r\sqrt{\omega} i = \lambda e^{\frac{\eta}{\omega} i}$$

$$\hookrightarrow r = \sqrt{14 + 14\alpha^2} = \sqrt{28} = 1$$

$$+g\theta = \frac{c\sqrt{\mu}}{\mu} = \sqrt{\mu} \rightarrow \theta = \frac{0}{\mu}$$

$$z = \ln(\underbrace{1}_{r=1} \underbrace{e^{\frac{\theta}{2}i}}_{\theta=\frac{\pi}{2}}) = \underbrace{\ln 1}_{r=1} + \underbrace{\frac{\pi}{2}i}_{\theta=\frac{\pi}{2}} = \underbrace{r \ln r}_{r=1} + \underbrace{\frac{\theta}{2}i}_{\theta=\frac{\pi}{2}}$$

فرد داخلی و خارجی ۲ عدد مختلفا :

$$z_1 = x_1 + iy_1$$

$$Z_r = u_r + i y_r$$

→ $z_1 \cdot z_2 = x_1 x_2 + y_1 y_2$
فرم دافلم

$$z_1 \times z_2 = x_1 y_2 - y_1 x_2$$

غیر-فارمی

زاویه بین دو عدد (میدار) مختلف :

$$\cos \theta = \frac{\vec{z}_1 \cdot \vec{z}_r}{|\vec{z}_1| |\vec{z}_r|}$$

$$\sin \theta = \frac{Z_1 \times Z_2}{|Z_1| |Z_2|}$$

مثال: اگر $z_1 = 3 - 4i$ و $z_2 = -4 + 3i$ باشد حاصل $\frac{z_1 \cdot z_2}{z_1 \times z_2}$ را بیابید.

$$z_1 \cdot z_2 = (3)(-4) + (-4)(3) = -24$$

$$A = \frac{-24}{-5} = \frac{24}{5}$$

$$z_1 \times z_2 = (3)(3) - (-4)(-4) = -7$$

مثال: اگر $z_1 = 3 - 4i$ و $z_2 = -4 + 3i$ باشد $\cos$ و $\sin$ زاویه بین z_1 و z_2 را بیابید.

$$|z_2| = \sqrt{4^2 + 9} = 5$$

$$|z_1| = \sqrt{9 + 16} = 5$$

$$\cos \theta = \frac{z_1 \cdot z_2}{|z_1| |z_2|} = \frac{-24}{25} \rightarrow \theta = \arccos \frac{-24}{25}$$

$$\sin \theta = \frac{z_1 \times z_2}{|z_1| |z_2|} = \frac{-7}{5 \times 5} = \frac{-7}{25} \rightarrow \theta = \arcsin \left(\frac{-7}{25} \right)$$

۰۹۱۹ ۹۳۶۲۷۱۷

riaziT



آموزش ریاضی عمومی ۱

بامهندس
مجتبی لاشینی

ویژه تمامی رشته های دانشگاهی

mojtabalashini 

m-lashini.ir 

mojtabalashini.riazi 

۰۹۱۹۹۳۶۲۷۱۷ 

تعریف حد:

تابع $y = f(x)$ و نقطه‌ای به طول a را در نظر می‌گیریم، فرض می‌کنیم $f(x)$ در

همسایگی a تعریف شده باشد. وقتی $x \rightarrow a$ مقادیر $f(x)$ به هم می‌نزدیک

دلخواه به L نزدیک شوند L را حد تابع $f(x)$ گویند و $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ است.

به مثاله نزدیک شویم $f(x)$ به L را می‌توان چنین در نظر گرفت که به ازای هر $\epsilon > 0$

که اختیار کنیم داشته باشیم $|f(x) - L| < \epsilon$ و می‌توانیم x به سمت a را می‌توان چنین

تفسیر کرد که به ازای یک $\delta > 0$ داشته باشیم $0 < |x - a| < \delta$ و به طور کلی باید:

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \epsilon$$

حداکثر از روی غایت:

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} x^2 + 5x =$$

$$\lim_{x \rightarrow 5} \sqrt{x+1} =$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \sqrt{x+1} =$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x+1}{x+3} =$$

درس سازهای حد:

- ① قدر مطلق:
- ② برابری
- ③ ضربه جبری
- ④ $\left(\frac{\text{عدد}}{0}\right)$

$$\frac{+ \text{عدد}}{0+} = +\infty$$

$$\frac{+ \text{عدد}}{0-} = -\infty$$

$$\frac{- \text{عدد}}{0+} = -\infty$$

$$\frac{- \text{عدد}}{0-} = +\infty$$

قضیه خنجر (فردی - حانبوی): اگر سه تابع f, g, h در یک بازه تعریف شوند و

$h(n) \leq f(n) \leq g(n)$ و $\lim_{n \rightarrow a} g(n) = \lim_{n \rightarrow a} h(n) = L$ باشد، آنگاه $\lim_{n \rightarrow a} f(n) = L$ است.

$$-n^2 < \underbrace{n^2 \sin \frac{1}{n}}_{f(n)} < n^2 : \lim_{n \rightarrow 0} f(n) = ?$$

مورتهای $\frac{\infty}{\infty}, \frac{\infty}{0}, \infty - \infty, 0 \times \infty, \infty^0, 1^\infty$ و جمع هتته.

$$\lim_{n \rightarrow a} \frac{f(n)}{g(n)} \stackrel{\div}{=} \lim_{n \rightarrow a} \frac{f'(n)}{g'(n)} = \dots \quad \boxed{\div} \text{قاعده هسپیتال:}$$

$$\lim_{n \rightarrow 1} \frac{n^2 - 5n + 4}{n^2 - 1} =$$

$$\lim_{n \rightarrow 1} \frac{n^2 - \sqrt[n]{n}}{\ln(r-n)} =$$

$$\lim_{n \rightarrow 3} \frac{n - \sqrt[3]{n}}{27 - n^3} =$$

$$\lim_{n \rightarrow 1} \frac{n^5 - 2n^3 + 3n^2 - 5n + 2}{n^3 - 3n + 2} =$$

فرم اینها : مثلثاتی با کمک هم ارزی : (جستار ملاحظه) **شرطاً : معمولاً $n \rightarrow 0$**

$$\sin n = n - \frac{n^3}{3!} + \frac{n^5}{5!} - \frac{n^7}{7!} + \dots$$

$$\cos n = 1 - \frac{n^2}{2!} + \frac{n^4}{4!} - \frac{n^6}{6!} + \dots$$

$$\operatorname{tg} n = n + \frac{n^3}{3} + \frac{n^5}{15} + \dots \quad |n| < \frac{\pi}{2}$$

$$\operatorname{Arctg} n = n - \frac{n^3}{3} + \frac{n^5}{5} - \frac{n^7}{7} + \dots \quad -1 \leq n \leq 1$$

$$\operatorname{Arcsin} n = n + \frac{n^3}{2 \times 3} + \dots$$

$$\ln(1+n) = n - \frac{n^2}{2} + \frac{n^3}{3} - \frac{n^4}{4} + \dots$$

$$e^n = 1 + n + \frac{n^2}{2!} + \frac{n^3}{3!} + \dots$$

$$\sinh n = \frac{n}{1!} + \frac{n^3}{3!} + \frac{n^5}{5!} + \dots$$

$$\cosh n = 1 + \frac{n^2}{2!} + \frac{n^4}{4!} + \dots$$

$$(1+n)^n = 1 + \frac{nn}{1!} + \frac{n(n-1)}{2!} + \dots$$

$$\lim_{n \rightarrow 0} \frac{1 - \cos n}{\sin^2 n} =$$

$$\lim_{n \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} n - \sin n}{n^3} =$$

$$\lim_{n \rightarrow 0} \frac{\sin n - n + \frac{n^3}{6}}{n^5}$$

$$\lim_{n \rightarrow 0} \left(\frac{1}{n^2} - \frac{\cos^2 n}{\sin^2 n} \right) =$$

$$\lim_{n \rightarrow 0} \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{n \operatorname{tg} n} \right) =$$

$$\lim_{n \rightarrow 0} \frac{e^n - 1 - \sin n}{n \sin n} =$$

$$\lim_{n \rightarrow 0} \frac{\tan n^2 - \ln(1+n^2) - \frac{n^2}{2}}{n^4} =$$

$$\lim_{n \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{1 - \cos(n - \frac{\pi}{2})}{\tan^2(n - \frac{\pi}{2})} =$$

$$\lim_{n \rightarrow 0} \frac{\cos n - \cos 2n}{n^2} =$$

$$\lim_{n \rightarrow 0} \frac{\sin(1 - \cos n)}{n^2}$$

$$\lim_{n \rightarrow 0} \frac{\sqrt[n]{1+n} - \sqrt[2]{1+n}}{\sin \frac{n}{4}}$$

$$\lim_{n \rightarrow \pm \infty} \frac{an^n + bn^{n-1} + cn^{n-2} + \dots}{a'n^m + b'n^{m-1} + c'n^{m-2} + \dots} \stackrel{\text{ل'Hôpital}}{=} \lim_{n \rightarrow \pm \infty} \frac{an^n}{a'n^m} = \begin{cases} -\infty, +\infty & n > m \\ \frac{a}{a'} & n = m \\ 0 & n < m \end{cases}$$

صورت $\frac{\infty}{\infty}$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{v_n^r - v_{n-1}}{v_n^r + v_{n+1}} =$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{v_n^r + \alpha n + 1}{v_n^r + f_n} =$$

$$\lim_{n \rightarrow -\infty} \frac{f_{n+1}}{n^r + \alpha n} =$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(n+r)^r - (n+1)^r}{v_n^r + \alpha n - 1} =$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{f_n^r + 1}}{v_n + 10} =$$

صورت $0 \times \infty$: برای رفع ابهام این حالت آن را به صورت های $\frac{0}{0}$ یا $\frac{\infty}{\infty}$ تبدیل می کنیم.

$$\lim_{n \rightarrow 0^+} n \ln n =$$

$$\lim_{n \rightarrow 0^-} n \cdot \cot n =$$

صورت $\infty - \infty$: با استفاده از هم ارزی خوش تدبیب و مفروضه مشترک
که فنون سوال را حل می کنیم.

$$\lim_{n \rightarrow 2} \left(\frac{1}{n-2} - \frac{1^2}{n^2-1} \right)$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{n^2 - n + 1} - n$$

عورت‌های بی‌همه 0° و ∞° : برای حل مسائلی به شکل $C = \lim_{n \rightarrow a} f(n)^{g(n)}$

وقتی به حالت $(\infty)^\infty$ یا 0° رسیدیم آنرا به فرم $C = e^{\lim_{n \rightarrow 0} g(n) \times \ln f(n)}$ می‌نویسیم.

$$\lim_{n \rightarrow 0} n^n =$$

$$\lim_{n \rightarrow 0^+} (\sin n)^{\frac{1}{\ln n}} =$$

عورت 1^∞ : هرگاه $\lim_{n \rightarrow a} f(n)^{g(n)} = 1^\infty$ جواب برابر است با: $e^{\lim_{n \rightarrow a} (f(n)-1) \times g(n)}$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2} =$$

$$\lim_{n \rightarrow 0^+} (1+n)^{\frac{1}{n}} =$$



آموزش ریاضی عمومی ۱

بامهندس
مجتبی لاشینی

ویژه تمامی رشته های دانشگاهی

mojtabalashini 

m-lashini.ir 

mojtabalashini.riazi 

۰۹۱۹۹۳۶۲۷۱۷ 

دنباله‌وسری:

دنباله: تابعی از n است که n نقطه‌ای تواند اعداد طبیعی را اختیار کند.

$$a_n = 3n - 1 \Rightarrow a_1 = 2, a_2 = 5, \dots$$

گرانداری دنباله: هرگاه ∞ حد دنباله وقتی $n \rightarrow \infty$ برابر ∞ شود می‌گوئیم گرانداری است.

یکنواختی دنباله: دنباله‌ای که همواره صعودی یا همواره نزولی باشد یکنواخت نامیده می‌شود.

همگرایی دنباله: وقتی حد دنباله زمانی که $n \rightarrow \infty$ عدد مشخص و معلوم باشد می‌گوئیم همگرایی دنباله به دست آن عدد همگراست.

واگرایی دنباله: چنانچه حد دنباله‌ای برابر ∞ شود و یا دنباله حد مشخص نداشته باشد می‌گوئیم دنباله واگراست.

مثال: یکنواختی، گرانداری و همگرایی دنباله‌های زیر را بررسی کنید.

$$① a_n = (-1)^n$$

$$\textcircled{۲} a_n = 1 + \frac{(-1)^n}{n}$$

$$\textcircled{۳} a_n = \sin n$$

$$\textcircled{۴} a_n = \cos \frac{n\pi}{r}$$

$$\textcircled{۵} a_n = \left(\frac{r}{r}\right)^n$$

$$\textcircled{۶} a_n = \cos \frac{\pi}{n}$$

نکته: $n! < n^n$

مثال: دنباله $a_n = \frac{3n^n + n!}{3n^n + 4n!}$ به چه عددی همگراست؟

مثال: حد دنباله $\frac{2^n + 5^{n-1}}{2^{n-1} + 5^n} = a_n$ را بیابید.

مثال: دنباله $a_n = n+2 - \sqrt{n^2 - 2n + 1}$ به چه عددی همگراست؟

مثال: دنباله $a_n = \frac{\sqrt[3]{n^2} \sin n!}{n+5}$ همگرا به چه عددی است؟

* وقتی می‌گوییم دنباله به L همگراست که جملات نهایی در همسایگی L با شعاع کوچک باشند.

$$\forall \varepsilon > 0, \exists M \in \mathbb{N}, N \geq M \rightarrow |a_n - L| < \varepsilon$$

(M عدد بسیار بزرگ)

مثال: دنباله $\frac{(-1)^n}{n}$ به از جمله چندم در شعاع ε از همگرایی خود قرار می‌گیرد؟

همگرایی سری :

برای همگرایی یک سری اولاً باید حد دنباله آن سری برابر صفر شود و سپس طبق نقاط آن را

در شرایط همگرایی چک کنیم.

تکانه : سری $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ است. اگر $p > 1$ همگرایی، اگر $p \leq 1$ واگرایی.

* سری $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ را سری همساز یا هارمونیک می نامند.

سوال : واگرایی و همگرایی دنباله های زیر را بررسی کنید.

$$1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1-n}{1+n} =$$

$$2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+3} =$$

$$3) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + 3n + 1} =$$

$$4) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} =$$

$$5) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n}} =$$

سری هندسی: اند در دنباله هندسی با به اول a_1 و قدر نسبت q داشته باشیم $12/1$ سری همگراست

و حد مجموع آن $\frac{a_1}{1-q}$ است.

مثال: عدد همگرایی سری $\sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n$ چقدر است؟

مثال: حاصل $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{5^n}$ چقدر است؟

سری تلسکوپی به فرم $\sum_{k=1}^n [f_k - f_{k+1}]$: جواب برابر $f_1 - f_{n+1}$ است.

مثال: مجموع سری $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(4n-1)(4n+3)}$ کدام است؟

مثال: مجموع سری $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{5}{k(k+1)}$ چقدر است؟

مثال: حاصل سری $\sum_{n=2}^{\infty} (\sqrt[n]{27} - \sqrt[n+1]{27})$ چقدر است؟

نکته: $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)(k+2)\dots(k+n)} = \frac{1}{n \times n!}$

$\rightarrow$ مثال $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{1}{2 \times 2!} = \frac{1}{4}$

فهم دیدی از سری تلسکوپی به صورت مجموع دو جمله:

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k (f_k + f_{k+1}) = (-1)^1 f_1 + \lim_{k \rightarrow \infty} (-1)^k f_{k+1}$$

مثال: حاصل $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{2^{n+1}}{n(n+1)}$ چقدر است؟

اختلاف اندیس بین از یکی:

$$\sum_{k=1}^n (f_k - f_{k+3}) = (f_1 + f_2 + f_3) - 3f_{n+3}$$

بررسی همگرایی سریها با استفاده از آزمون:

۱- آزمون مقایسه: اگر $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ و $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ سری باشند و $a_n \leq b_n$ باشد.

اگر $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ همگرا باشد سری $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ نیز همگراست.

اگر $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ واگرا باشد سری $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ نیز واگراست.

مثال: همگرایی یا واگرایی سری $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^5+3}$ را بررسی کنید.

مثال: همگرایی یا واگرایی $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^n}$ را بررسی کنید.

۲- آزمون خارج قسمت: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = c > 0$ ، هرگاه a_n باشد آنگاه a_n از نظر واداری و

همداری مثل هم هستند.

مثال: همگرایی یا واگرایی سری $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n - n}$ را بررسی کنید.

۳- آزمون دالامبر: سری $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ را در نظر بگیرید اگر $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = L$ باشد آنگاه اگر:

$L < 1$ سری همگراست، $L > 1$ سری واگراست، $L = 1$ نمی توان نتیجه ای گرفت.

مثال: همگرایی یا واگرایی سری $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n-1}}{2^n}$ را بررسی کنید.

۴- آزمون دوشی: اگر $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ یک سری مثبت باشد و $\sqrt[n]{|a_n|} = L$ و $L < 1$ باشد سری همگراست. اگر $L > 1$ باشد سری واگراست و اگر $L = 1$ باشد نمی توان نتیجه گرفت.

مثال: همگرایی یا واگرایی سری $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n e^{2n}}{3^{2n}}$ را بررسی کنید.

۵- آزمون انتگرال: اگر $f(n)$ یک سری مثبت و $f(x)$ یک تابع مثبت و نزولی باشد برای تعیین همگرایی یا واگرایی

سری $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ باید همگرایی یا واگرایی انتگرال $\int_1^{\infty} f(x) dx$ را تعیین نمود.

مثال: همگرایی یا واگرایی سری $\sum_{n=1}^{\infty} n e^{-n^2}$ را بررسی کنید.

محاسبه فاصله همگرایی و شعاع همگرایی :

فرمول شعاع همگرایی :

$$1) \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|u_n|} = \frac{1}{R} \quad \text{و} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = \frac{1}{R}$$

فاصله همگرایی : برای به دست آوردن فاصله همگرایی باید قدر مطلق عبارت شامل n

را بدون در نظر گرفتن توان، کوچک‌ترین یا بزرگ‌ترین شعاع همگرایی قرار دهیم و تفسیر آن را بیاوریم.

مثال: شعاع و فاصله همگرایی سری $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-3)^n}{n^2}$ را بیابید.

بسط تیلور و مک لورن:

$$f(x) = f(a) + f'(a) \frac{(x-a)}{1!} + f''(a) \frac{(x-a)^2}{2!} + \dots + f^{(n)}(a) \frac{(x-a)^n}{n!} + R_n$$

باقی مانده
که آنرا صفر نداریم:

$$f(x) = f(a) + f'(a) \frac{(x-a)}{1!} + f''(a) \frac{(x-a)^2}{2!} + \dots$$

تیلور

اگر $a=0$ باشد:

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + f''(0) \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{f^{(n)}(0)x^n}{n!} + \dots$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots$$

توانیم سرزنش

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots$$

$$\lg x = x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$$

در فصل حد گفته شد

مثال: فدریب چهارمین جمله بسط تابع $f(n) = \ln(1+2n)$ را بنویسید.

مثال: سه جمله اول بسط تیلور تابع $f(n) = \sqrt{n}$ را بر حسب توان های $(n-4)$ بنویسید.

مثال: اگر $f(n) = n^2 - \frac{n^4}{3!} + \frac{n^6}{5!} - \frac{n^8}{7!} + \dots$ آنگاه $f'(\frac{1}{2})$ مقدار است.

