



آموزش ریاضی عمومی ۲

با مهندس
مجتبی لاشینی

ویژه تمامی رشته های دانشگاهی

mojtabalashini 

m-lashini.ir 

mojtabalashini.riazi 

۰۹۱۹۹۳۶۲۷۱۷ 

توابع چند متغیره :

مقادیر بسیاری از توابع به کمک بیش از یک متغیر مستقل تعیین می شود برای مثال

حجم استوانه از رابطه $V = \pi r^2 h$ که r شعاع قاعده و h ارتفاع استوانه است تعیین می گردد.

دامنه و برد توابع دو متغیره :

در تعیین دامنه تابع $Z = f(x, y)$ مجموعه نقاطی مانند $A(x, y)$ در صفحه xy می تواند

به عنوان دامنه در نظر گرفته شوند و حوزه مقادیر تابع نیز با توجه به فاکتور آن تعیین می گردد.

مثال: دامنه و برد تابع $f(x, y) = \sqrt{y - x^2}$ را به دست آورید.

حد توابع در متغیره:

تابع در متغیره $f(x, y)$ را در نظر بگیرید برای وجود حد $\lim_{(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)} f(x, y)$ باید

مقدار این حد مستقل از روش میل کردن (x, y) به سمت (x_0, y_0) باشد، به عبارت دیگر

اگر با چند روش مختلف میل کردن، جواب های مختلف به دست آید آنگاه حد موجود نیست.

معمولاً برای بررسی وجود حد توابع در متغیره میلهای $y = mx$ را انتخاب می کنیم اگر

مقدار حد به m بستگی داشته باشد تابع قطعاً حد ندارد و اگر حد به m بستگی نداشته باشد می توان

در مورد حد اظهار نظر کرد.

مثال: حد تابع $f(x, y) = \frac{x}{x+y}$ در نقطه $(0, 0)$ را بیابید.

۲

تذکره: معمولاً وقتی حد چیه است می توان از مختصات قطبی $\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{cases}$ در تابع $f(x, y)$

استفاده کرد و وقتی $r \rightarrow 0$ مقدار r را می بینیم که به سمت ۰ میل می کند از θ بود مقدار حد به دست آمده جواب درست است

مثال: مقدار $\lim_{(x,y) \rightarrow (1,0)} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$ را بیابید.

مثال: حاصل حدود زیر را بدست آورید.

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (2,1)} \frac{x^2 - xy + y^2}{x^2 - y + 1} =$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 - 3y^2}{x + y^2} =$$

$$\oint \frac{xy^3}{x^4+y^4} =$$

$(x,y) \rightarrow (0,0)$

$$\oint \frac{xy^2}{x^2+y^4} =$$

$(x,y) \rightarrow (0,0)$

$$\oint \frac{xy}{x^2+y^2} =$$

$(x,y) \rightarrow (0,0)$

تعریف مشتق جزئی:

اگر $z = f(x, y)$ با فرض اینکه مقدار ثابتی باشد داریم:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x} = f'_x(x, y)$$

که $\frac{\partial z}{\partial x}$ مشتق جزئی تابع z نسبت به متغیر x است به همین ترتیب $\frac{\partial z}{\partial y}$ مشتق

جزئی تابع z نسبت به متغیر y نامیده می شود (می توان از فرمول مشتق استفاده کرد)

مثال: مقادیر $\frac{\partial z}{\partial x}$ و $\frac{\partial z}{\partial y}$ را برای تابع $z = \ln\left(1 + \frac{x}{y}\right)$ تعیین کنید.

مثال: فرض کنید تابع $f(x, y)$ به صورت زیر باشد مطلوب است محاسبه $f'_x(0, 0)$:

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2 + y^2} & (x, y) \neq 0 \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

مشتق جزئی مرتبه‌های بالاتر: اگر $z = f(x, y)$ داریم:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right) = f''_{xx} = z''_{xx} \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right) = f''_{xy} = z''_{xy}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right) = f''_{yy} = z''_{yy} \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right) = f''_{yx} = z''_{yx}$$

⚡ وقتی تمام مشتق‌های جزئی تابع پیوسته باشد نتیجه نهایی به ترتیب مشتق‌گیری بستگی ندارد.

یعنی $z''_{yx} = z''_{xy}$ می‌باشد.

مثال: مشتق‌های جزئی مرتبه دوم تابع $z = \arctan \frac{x}{y}$ را بدست آورید.

مثال: اگر $f(x, y) = x^2 \operatorname{Arctg} \frac{y}{x}$ باشد مقدار $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ در نقطه $(1, 1)$ مقدار؟

مثال: حاصل $\frac{\partial^3}{\partial x^2 \partial y^3} (x \sin y + e^y)$ را بیابید.

مثال: فرض کنید $f(x, y)$ به صورت زیر داده شده است. نشان دهید در مبدأ مشتقات $f_{xy} \neq f_{yx}$

$$f(x, y) = \begin{cases} 0 & x=y=0 \\ xy \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & x^2+y^2 \neq 0 \end{cases}$$

مثال: مشتقات جزئی دوم z_{xx} , z_{xy} , z_{yx} , z_{yy} توابع زیر را بیابید.

① $z = \arctg xy$

$$\textcircled{۲} \ln(x^2 + y^2)$$

مثال: مطلوب است محاسبه u_{myn} به ازای $u(x,y) = \cos(x + \sin y)$ ؟

دیفرانسیل تابع :

اگر تابع باضابطه $y = f(x)$ را در نظر بگیریم دیفرانسیل تابع y را به فرم dy نمایش داده و به صورت

$$\boxed{dy = y' dx}$$

نشان می دهیم.

دیفرانسیل کامل تابع دو متغیره: اگر $u = f(x, y)$ باشد که x و y متغیرهای مستقل و تابع f

دارای مشتق جزئی مرتبه اول باشد آنگاه دیفرانسیل u به صورت $\boxed{du = \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy}$ نمایش می دهیم.

مثال: اگر $u = x^y$ باشد آنگاه دیفرانسیل کامل u را بنویسید.

مشتق جزئی در توابع چند متغیره :

اگر $z = \phi(u, v)$ در آن u, v توابعی مشتق پذیر با متغیره های x و y باشند و $v = g(x, y)$ و

$u = f(x, y)$ باشد. مشتقات تابع z نسبت به x و y از روابط زیر بدست خواهد آمد:

$$\textcircled{1} \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial \phi}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial \phi}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} \quad \textcircled{2} \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial \phi}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial \phi}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial y}$$

مثال: اگر $w = f(u, v)$ باشد با شرط $u = x + at$ و $v = y + bt$ مقدار $\frac{\partial w}{\partial t}$ را بنویسید.

مثال: اگر $z = x^2 - xy + 2y^2$ ، $x = (t+1)^2$ ، $y = t + \sqrt{t}$ باشد. $\frac{dz}{dt}$ در $t=1$ را حساب کنید.

مثال: اگر $z = u^2 + v^2$, $u = e^{x^2 + y^2}$, $v = \frac{x}{y}$ باشد در این صورت $\frac{\partial z}{\partial x}(1,1)$ را بیابید.

مثال: اگر $z = f\left(\frac{x}{y}\right)$ باشد و $\frac{\partial z}{\partial x}$ در نقطه $\left(\frac{x}{y}\right) = 2$ برابر ۱ باشد.

۱. مشتق سری ضمنی:

همان‌طور که تابع $F(x, y, z) = 0$ دارای مشتق ضمنی باشد می‌توان یکی از متغیرها را تابعی از

در متغیر دیگر در نظر گرفت داریم:

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F'_y}{F'_z}, \quad \frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F'_x}{F'_z}$$

مثال: اگر $F(x, y, z) = \sin y + 2e^{xyz} = 0$ باشد، $\frac{\partial z}{\partial y}$ بیابید.

مثال: اگر $\sin y + \sin y z + \sin z x = 1$ باشد، $\frac{\partial z}{\partial x}$ را در نقطه $A(1, 0, 0)$ بیابید.

تذکره: اگر $F(x, y, z, w) = 0$ باشد آنگاه $\frac{\partial z}{\partial y} = - \frac{F'_y}{F'_w}$

مثال: اگر $w = x^3 e^{y+z}$ آنگاه حاصل $\frac{\partial z}{\partial y}$ را بیابید.

مثال: در رابطه $x^2 z + 2y + e^{x-y-z} = 0$ متغیرهای x, y مستقل یکدیگرند مقدار

$\frac{\partial z}{\partial x}$ در نقطه $(1, -1, 1)$ را بیابید.

قضیه اولیه:

تعریف تابع همگن: تابع $f(x, y)$ را همگن از درجه n می‌گویند هرگاه به ازای هر

عدد مثبت λ داشته باشیم $F(\lambda x, \lambda y) = \lambda^n f(x, y)$ مثلاً $\sin \frac{x}{y}$ همگن درجه ۰

$x^2 + y^2$ همگن درجه ۲

$x^2 + y$ غیر همگن

هرگاه تابع $f(x, y, z)$ همگن از درجه n و دارای مشتق مرتبه اول باشد داریم:

$$x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y} + z \frac{\partial f}{\partial z} = n f$$

(قضیه اولیه): اگر تابع دو متغیره $f(x, y)$ در نظر گرفته شود داریم:

$$x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y} = n f(x, y)$$

مثال: هرگاه $f(x, y) = (x^2 + y^2) + \ln\left(\frac{\sqrt{x} - \sqrt{y}}{\sqrt{x} + \sqrt{y}}\right)$ باشد آن‌گاه حاصل $x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y}$ برابر

مثال: هرک ه $f(x,y) = \sin \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{x+y}$ باشد آنگاه $\frac{\partial f}{\partial x}$ و $\frac{\partial f}{\partial y}$ را بیابید.

مثال: در تابع $z = \frac{x^2}{y} - \frac{x}{x+y}$ حاصل $A = x \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + y \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ را بیابید.

نکته: اگر $F(u) = f(x, y, z)$ ، تابعی همجن از درجه n باشد داریم.

$$x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y} + z \frac{\partial u}{\partial z} = n \frac{F(u)}{F'(u)}$$

مثال: اگر $u = \arcsin\left(\frac{x+y}{\sqrt{x+y}}\right)$ باشد آن‌گاه $x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y}$ را بیابید.

محاسبات جزئی با استفاده از ژاکوبین:

اگر $f(n, y, u, v) = 0$ و $g(n, y, u, v) = 0$ در آن $u = u(n, y)$, $v = v(n, y)$ می باشد آنگاه

$$\textcircled{1} \frac{\partial u}{\partial n} = - \frac{\frac{\partial(f, g)}{\partial(n, y)}}{\frac{\partial(f, g)}{\partial(u, v)}}$$

$$\textcircled{2} \frac{\partial v}{\partial n} = - \frac{\frac{\partial(f, g)}{\partial(y, n)}}{\frac{\partial(f, g)}{\partial(u, v)}}$$

$$\textcircled{3} \frac{\partial v}{\partial y} = - \frac{\frac{\partial(f, g)}{\partial(y, y)}}{\frac{\partial(f, g)}{\partial(u, v)}}$$

$$\textcircled{4} \frac{\partial u}{\partial y} = - \frac{\frac{\partial(f, g)}{\partial(y, u)}}{\frac{\partial(f, g)}{\partial(u, v)}}$$

ژاکوبین $J = \frac{\partial(f, g)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} f_u & f_v \\ g_u & g_v \end{vmatrix}$ می باشد.

مثال: اگر $u^2 + v^2 = n - y$, $u + v^2 = n + y$ باشد آنگاه $\frac{\partial u}{\partial n}$ بیابید.

مثال: اگر $n-y+u^3+u^2=1$ و $n+y+u^3+u^2=2$ باشد آنگاه $\frac{\partial u}{\partial y}$ بیابید.

نکته: اگر $f(u, v, w)$ ، $g(u, v, w)$ ، $h(u, v, w)$ نسبت به u, v, w متغیر باشند:

$$\frac{\partial(f, g, h)}{\partial(u, v, w)} = \begin{vmatrix} f_u & f_v & f_w \\ g_u & g_v & g_w \\ h_u & h_v & h_w \end{vmatrix}$$

مثال: اگر $u = x^3 + y^2 + z^2$ ، $v = x + y + z$ ، $w = xy + yz + zx$ حاصل عبارت

$$\frac{\partial(u, v, w)}{\partial(x, y, z)}$$

بیابید.

به دست آوریم نقاط بحرانی و استدم های توابع دو متغیره :

اگر تابع $z = f(x, y)$ و مشتقات جزئی آن (تا مرتبه دوم) در نقطه (x_0, y_0) بدین صورت باشد

$$f_x(x_0, y_0) = f_y(x_0, y_0) = 0 \text{ و هessian } H = f_{xx} \cdot f_{yy} - f_{xy}^2 > 0 \text{ باشد}$$

آنگاه (x_0, y_0) باشد آنگاه نقطه (x_0, y_0) استدم نسبی تابع است که اگر $f_{xx}(x_0, y_0) > 0$ باشد

نقطه (x_0, y_0) مینیمم نسبی و اگر $f_{xx}(x_0, y_0) < 0$ باشد نقطه (x_0, y_0) ماکزیمم نسبی تابع می باشد.

۲- اگر (x_0, y_0) باشد آنگاه نقطه (x_0, y_0) نقطه زینی تابع می باشد.

$$\text{رشته های دستگاه} \left\{ \begin{array}{l} f_x = 0 \\ f_y = 0 \end{array} \right. \text{ نقاط بحرانی تابع محسوب می شوند.}$$

مثال: تابع $z = x^2 - xy + y^2 - 3x$ دارای چندین نقطه اری باشد؟

مثال: بیستین مقوار تابع در صفحه $Z = -2x^2 - y^2 + 2x + 3y$ را بیابید.

به دست آوردن ماکزیمم و مینیمم توابع مقید با استقاه از فرایب لانراند:

اگر آکسدم تابع $f = f(x, y, z)$ را با شرط $g(x, y, z) = 0$ بخواهیم تابع لانراند

به صورت $u = f(x, y, z) + \lambda g(x, y, z)$ است، λ را فرایب لانراند می نویسم

با به معادلات زیر همزمان برقرار باشد.

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x} + \lambda \frac{\partial g}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial y} + \lambda \frac{\partial g}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial f}{\partial z} + \lambda \frac{\partial g}{\partial z} = 0 \\ g(x, y, z) = 0 \end{cases}$$

مثال: ماکزیمم مقدار تابع $z = y^2 - x^2$ با شرط $x + 2y = 6$ را بیابید.

مثال: ماکزیمم و مینیمم تابع $z = 6 - 4x - 3y$ با شرط $x^2 + y^2 = 1$ را بیابید.

معادله مماس و خط قائم بر یک سطح:

معادله مماس بر روی S جابجاییه $F(x, y, z) = 0$ در نقطه $P_0(x_0, y_0, z_0)$ عبارت است از:

$$F'_x(x_0, y_0, z_0)(x - x_0) + F'_y(x_0, y_0, z_0)(y - y_0) + F'_z(x_0, y_0, z_0)(z - z_0) = 0$$

و معادله خط قائم بر این رویه در نقطه P_0 عبارت است از:

$$\frac{x - x_0}{F'_x(x_0, y_0, z_0)} = \frac{y - y_0}{F'_y(x_0, y_0, z_0)} = \frac{z - z_0}{F'_z(x_0, y_0, z_0)}$$

مثال: معادله مماس بر رویه $x^2 + y^2 + z^2 = 3$ در نقطه $(1, 1, 1)$ واقع بر روی کره

رابطه میسر.

مثال: معادله خط قائم بر رویه $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ در نقطه $(1, 2, 4)$ رابطه میسر.

مثلاً: اگر $\phi = \phi(x, y, z)$ تابعی اسکالر (غیر برداری) باشد در این صورت

مثلاً: ϕ را به نام $\nabla \phi$ نشان داده و به صورت

$$\vec{\nabla} \phi = \frac{\partial \phi}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial \phi}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial \phi}{\partial z} \vec{k}$$

تعریف می شود که در این رابطه عملگر (یا تبدیلی) ∇ را دل یا خابلا می نامیم.

مثال: مثلاً: $\phi(x, y, z) = xy + yz^2$ تابعی در نقطه ای به مضقات $m(2, -1, -1)$

را بنویسید.

مثال: مثلاً: $\phi(x, y, z) = \ln \sqrt{x^2 + y^2}$ را در نقطه $p(3, 4, 0)$ بنویسید.

دیوژانی :

میدان برداری $\vec{F}$ را به صورت $\vec{F}(x, y, z) = F_x(x, y, z)\vec{i} + F_y(x, y, z)\vec{j} + F_z(x, y, z)\vec{k}$ تعریف

میکنیم. دیوژانی $\vec{F}$ را با نماد $\text{div } \vec{F}$ نمایش داده و به صورت زیر تعریف می‌نماییم:

$$\text{div } \vec{F} = \vec{\nabla} \cdot \vec{F} = \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z}$$

مثال: دیوژانی $\vec{F} = xyz^2\vec{i} + x^2yz\vec{j} + x^2yz^2\vec{k}$ را در نقطه $M(1, 1, -1)$ بیابید.

کurl :

میدان برداری $\vec{F}$ را در نقطه مشخصه $\vec{F}$ را با نماد $\text{curl } \vec{F}$ نمایش داده و داریم:

$$\text{curl } \vec{F} = \vec{\nabla} \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z} \right) \vec{i} + \left(\frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x} \right) \vec{j} + \left(\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} \right) \vec{k}$$

مثال: گویا بردار $A = 2xy\vec{i} + 7xz\vec{j} + 4xy\vec{k}$ در نقطه $(1, 2, 3)$ بیابیم.

پاسخ: دیورژانس و گویا تابع برداری $\vec{f} = x^2\vec{i} + (z^2 - y)\vec{j} + xy\vec{k}$ را بیابیم.

لاپلاسین: اگر تابع $\phi = \phi(x, y, z)$ تابعی اسکالر باشد در این صورت لاپلاسین ϕ

را به فرم $\nabla^2 \phi$ نمایش می دهیم و به صورت $\nabla^2 \phi = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2}$ تعریف می شود.

مثال: لاپلاسین تابع $v = 6x^2y^2z + x^2$ در نقطه $(1, 0, 1)$ را بیابید.

مثال: لاپلاسین تابع $w = x^2y + 3xy^4$ را بیابید.

مشتق سویی (جهتی):

اگر $\phi = \phi(x, y, z)$ تابعی اسکالر باشد آنگاه مشتق سویی ϕ در جهت بردار $\vec{u}$

را می‌توان با فرمول زیر حساب کرد. $\vec{u} \cdot \nabla \phi =$ مشتق سویی ϕ در جهت بردار $\vec{u}$

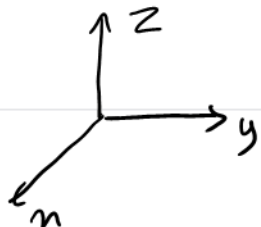
مثال: مشتق سویی تابع $\phi(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2$ در نقطه $(-1, 4, 3)$ در امتداد بردار

$$\vec{A} = 3\vec{i} - 2\vec{j} + 4\vec{k} \quad \text{را بیابید.}$$

بردار:

دستگاه مختصات ۳ بعدی: در این دستگاه هر نقطه دارای سه پارامتر طول، عرض و ارتفاع

است و به صورت (x, y, z) نوشته می شود.



فاصله بین دو نقطه $A(x_1, y_1, z_1)$ و $B(x_2, y_2, z_2)$:

$$|\vec{AB}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

مثال: فاصله دو نقطه $A(3, 1, -9)$ و $B(-1, 1, -12)$ را بیابید.

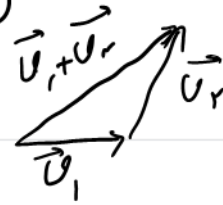
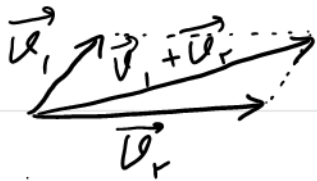
ضرب اسکالر: حاصل ضرب یک عدد حقیقی مانند λ در بردار $\vec{A}$ ، برداری مانند $\vec{B}$ است که

اگر λ مثبت باشد، $\vec{B}$ برداری است هم جهت با $\vec{A}$ و اگر λ منفی باشد $\vec{B}$ برداری است

در خلاف جهت $\vec{A}$ ، و اندازه $\vec{B}$ ، λ برابر اندازه $\vec{A}$ خواهد بود.

$$\vec{C} = \vec{A} + \vec{B} = (x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2)$$

حاصل جمع بردار:



قانون متوازی الاضلاع

قانون مثلث

مثال: اگر $\vec{A} = (1, 3, 4)$ ، $\vec{B} = (2, 1, 2)$ باشد آنگاه $\vec{C} = 3\vec{B} - 2\vec{A}$ را بیابید.

کسینوس های هادی یک بردار:

اگر α, β, θ زوایایی باشند که بردار دلخواه $\vec{u} = (a, b, c)$ با جهت مثبت

محورهای x, y, z می سازد آنگاه $\cos \alpha, \cos \beta, \cos \theta$ کسینوس های هادی بردار

می گویند و از فرمول های زیر به دست می آیند.

$$\cos \alpha = \frac{a}{|\vec{u}|}, \quad \cos \beta = \frac{b}{|\vec{u}|}, \quad \cos \theta = \frac{c}{|\vec{u}|}$$

$$\rightarrow \cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \theta = 1$$

حاصل‌ضرب داخلی دو بردار (حاصل‌ضرب اسکالر)

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = |\vec{A}| \times |\vec{B}| \cdot \cos \theta \quad \text{و} \quad \vec{A} \cdot \vec{B} = x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2$$

↙ زاویه بین دو بردار

$$\hookrightarrow \cos \theta = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}$$

مثال: زاویه بین دو بردار $\vec{a}_1 (1, 1, 0)$ و $\vec{a}_2 (3, 0, 4)$ را بیابید.

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2 = 0 \quad \text{شرط عمود بودن دو بردار:}$$

خواص ضرب داخلی:

$$\textcircled{1} A \cdot B = B \cdot A \quad \textcircled{2} A \cdot A = |A|^2 \quad \textcircled{3} A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$$

طول تصویر یک بردار: تصویر بردار A بر بردار B را به صورت $\text{Proj}_B A = \frac{A \cdot B}{|B|^2} (B)$

است و طول این تصویر $|\text{Proj}_B A| = A \cdot \frac{B}{|B|}$ می باشد.

مثال: طول تصویر $A = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$ بر بردار $B = \frac{\vec{i} + \vec{k}}{\sqrt{2}}$ را بیابید.

حاصلضرب خارجی دو بردار:

$$\vec{C} = \vec{A} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} = (y_1 z_2 - z_1 y_2) \vec{i} + (z_1 x_2 - x_1 z_2) \vec{j} + (x_1 y_2 - y_1 x_2) \vec{k}$$

$$\rightarrow |\vec{C}| = |\vec{A}| \cdot |\vec{B}| \cdot \sin \theta$$

اندازه $\vec{A} \times \vec{B}$ برابر مساحت متوازی الاضلاعی است که توسط دو بردار A و B ساخته شده است و

بردار $\vec{C} = \vec{A} \times \vec{B}$ بر دو بردار A و B عمود است.

مثال: اگر $\vec{A} = (1, -1, 2)$ و $\vec{B} = (2, 1, 3)$ باشد $\vec{A} \times \vec{B}$ را بیابید.

خواص ضرب خارجی دو بردار:

$$\textcircled{1} \quad A \times B = -(B \times A)$$

$$\textcircled{2} \quad A \cdot (A \times B) = 0, \quad B \cdot (A \times B) = 0$$

ضرب مختلف سه بردار:

$$\vec{A} \cdot (\vec{B} \times \vec{C}) = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}$$

مجموع متوازی السطوح

مسئله: جمع متوازی السطوحی که از سه بردار $\vec{a} = (1, 1, 1)$, $\vec{b} = (1, -1, 1)$, $\vec{c} = (-1, 1, 1)$

حاصل می شود را بنویسید.

معادله خط:

هر خط راست d در فضای R^3 را می‌توان به وسیله نقطه ای مانند $A(x_0, y_0, z_0)$ روی آن و بردار $\vec{r} = (p, q, r)$ موازی d است و بردارهای خط نامیده می‌شود.
 معادله برداری و مقارن دارد.

$$d: \frac{x-x_0}{p} = \frac{y-y_0}{q} = \frac{z-z_0}{r} \quad \text{مقارن:} \quad d = \begin{cases} x-x_0 = pt \\ y-y_0 = qt \\ z-z_0 = rt \end{cases} \quad \text{بردار متدی:}$$

مثال: معادله خط گذرنده از نقطه $A(1, -1, 0)$ و موازی با بردار $\vec{r} = \vec{i} - 2\vec{j} + 3\vec{k}$ را بنویسید.

مثال: معادله خط گذرنده از دو نقطه $A(2, 3, 2)$ و $B(3, 3, 0)$ را بنویسید.

* برای به دست آوردن فاصله نقطه دلخواه P از خط d ، ابتدا یک نقطه دلخواه مانند P_0 روی خط در نظر می‌گیریم. اگر بردارهای خط d را $\vec{u}$ فرض کنیم، اینطور:

$$\text{فاصله نقطه } P \text{ از خط } d = \frac{|\vec{PP}_0 \cdot \vec{u}|}{|\vec{u}|}$$

مثال: فاصله نقطه $P(-1, 3, -1)$ از خط $\begin{cases} x = 2t + 1 \\ y = 1 \\ z = t \end{cases}$ را بیابید.

وقتی دو خط نسبت به هم:

① اگر دو خط راست d و d' بایردهای هادی $\vec{u}(a, b, c)$ و $\vec{u'}(a', b', c')$ متاصفوف باشند

شرط اینکه دو خط d, d' باهم موازی باشند آن است که بایردهای هادی دو خط باهم موازی باشند.

② برای اینکه دو خط d, d' بایردهای هادی $\vec{u}(a, b, c)$ و $\vec{u'}(a', b', c')$ متقاطع باشند

لازم است $(\vec{u} \times \vec{u'}) \cdot \vec{PP'} = 0$ باشد که P, P' به ترتیب نقاط دلخواه روی دو خط d, d' هستند.

و اگر حاصلضرب متقاطع فوق برابره صفر شود دو خط متانگه هستند.

مثال: دو خط $\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{3} = \frac{z-3}{4}$ و $\frac{x-2}{3} = \frac{y-3}{4} = \frac{z-4}{5}$ در فضای سه بعدی هم دارند.

نکته: اگر دو خط d, d' متناظر باشند خطی وجود دارد که هر دو خط d, d' را قطع می‌کند و بر دو خط عمود است این خط را عمود مشترک دو خط d, d' می‌گویند.

$$\text{طول عمود مشترک} = \frac{|PP' \cdot (v \times v')|}{|v \times v'|}$$

مثال: کوتاه‌ترین فاصله بین دو خط $\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{3} = \frac{z-3}{4}$ و $\frac{x-2}{3} = \frac{y-3}{4} = \frac{z-4}{5}$ را بیابید.

معادله صفحه:

اگر یک نقطه $M(x_0, y_0, z_0)$ در صفحه P و $\vec{N} = (a, b, c)$ بردار نرمال صفحه P باشد

آنگاه معادله صفحه P به صورت زیر خواهد بود: $P: ax + by + cz + d = 0$

مثال: معادله صفحه ای که از نقطه $A(1, 2, 3)$ عمود بر بردار $\vec{N} = \vec{i} + \vec{j} - 2\vec{k}$ می‌گذرد بنویسید.

فاصله یک نقطه از یک صفحه:

فاصله نقطه $M(x_0, y_0, z_0)$ از صفحه به معادله $ax + by + cz + d = 0$ از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$d = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

مثال: فاصله نقطه $A(1, 2, 3)$ از صفحه $P: 2x - y + 2z + 9 = 0$ را بیابید.

وضعیت دو صفحه نسبت به هم:

اگر $p: ax+by+cz+d=0$ و $p': a'x+b'y+c'z+d'=0$ معادلات دو صفحه باشند.

$$\textcircled{1} p \parallel p' \Leftrightarrow \frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'} \quad \textcircled{2} p = p' \Leftrightarrow \frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'} = \frac{d}{d'} \quad \textcircled{3} p \perp p' \Leftrightarrow aa' + bb' + cc' = 0$$

فاصله دو صفحه موازی از هم:

اگر $p: ax+by+cz+d=0$ و $p': a'x+b'y+c'z+d'=0$ دو صفحه موازی باشند

فاصله این دو صفحه از رابطه:

$$HH' = \frac{|d-d'|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

محاسبه می شود.

مثال: اگر دو صفحه $p: (2-a)x+y-2z=2$ و $p': 2x+(b+1)y-2z=1$ با هم موازی باشند

آنگاه حاصل $\frac{2a-b+3}{3}$ را بیابید.

مثال: خط به معادله $\frac{x-1}{3} = \frac{y-1}{2} = \frac{z+1}{2}$ نسبت به صفحه $4x + 4y - 2z = 1$ چقدر عمقی دارد؟

مثال: دو صفحه به معادله‌های $2x + y - z = 1$ و $x + 2y + z = 1$ نسبت به هم چقدر عمقی دارند؟

مثال: فاصله عمودی بین دو صفحه $4x - 1y - z + 9 = 0$ و $4x - 1y - z = 6$ را بیابید.

مثال: حجم چهاروجهی به رئوس $A(1, 3, 0)$ ، $B(2, -1, 3)$ ، $C(-2, 2, -1)$ و $D(-1, 1, 2)$ را بیابید.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}_{m \times n} \quad \text{ماتریس:}$$

هرگاه $m=n$ باشد ماتریس مربعی است و دارای قطر اصلی و فرعی است.

ماتریس قطری: ماتریس مربعی A را قطری می‌نامیم هرگاه درایه‌های طرفین قطر اصلی

آن صفر باشند به عنوان مثال: $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$ ماتریس قطری است.

ماتریس همبانی: ماتریس مربعی را که درایه‌های قطر اصلی آن یک و سایر درایه‌های آن

صفر باشند ماتریس همبانی (واحد) می‌نامیم و آن را با I_n یا I نمایش می‌دهیم.

ماتریس‌های مساوی: دو ماتریس را مساوی می‌گوئیم هرگاه درایه‌های آنها نظیر به نظیر با هم برابر باشند.

ماتریس‌های هم‌مرتبه: دو ماتریس را هم‌مرتبه گوئیم هرگاه تعداد سطرها و ستونهای آنها با هم برابر باشند.

ماتریس صفر: هرگاه تمام درایه‌های یک ماتریس صفر باشند آن را ماتریس صفر می‌نامیم.

قدیمه ماتریس: قدیمه ماتریس A را به صورت $A = [a_{ij}]$ می‌دهیم و ماتریس A که دارای قدیمه n و m درایه‌های ماتریس A به دست می‌آید.

حاصل جمع و تفاضل دو ماتریس:

برای جمع یا تفاضل دو ماتریس هم مرتبه کافی است درایه‌های تقابله نظیر دو ماتریس را با هم

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 7 & 6 \end{bmatrix} \quad A+B = \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 9 & 8 \end{bmatrix} \quad \text{جمع یا تفریق کنیم.}$$

$$4 \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & 8 \\ 12 & 4 \end{bmatrix} \quad \text{ضرب یک عدد در یک ماتریس:}$$

ضرب ماتریس‌ها:

هرگاه A و B دو ماتریس باشند ماتریس $A \times B$ موجود است هرگاه تعداد ستونهای A برابر تعداد سطریهای

ماتریس B باشند و تعداد سطریهای ماتریس $A \times B$ برابر با تعداد سطریهای ماتریس A و

تعداد ستونهای آن برابر با تعداد ستونهای ماتریس B خواهد بود.

مثال: اگر $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 2 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 3 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ ماتریس‌های $A \times B$ و $B \times A$ را بنویسید.

✱ ضرب ماتریس‌ها خاصیت جابجایی ندارد.

$$\begin{cases} A(B+C) = AB + AC \\ (B+C)A = BA + CA \end{cases}$$

✱

$$(AB)C = A(BC)$$

✱

به توان رساندن یک ماتریس مربعی:

هنگامی که A یک ماتریس مربعی باشد $A \cdot A = A^2$, $A \cdot A^2 = A^3$, $\dots$

✱ اگر $A = \begin{bmatrix} 0 & k \\ k & 0 \end{bmatrix}$ آنگاه $A^n = \begin{bmatrix} k^n & 0 \\ 0 & k^n \end{bmatrix}$ و $A^n = \begin{bmatrix} 0 & k^n \\ k^n & 0 \end{bmatrix}$ (برای n فرد)

✱ اگر A ماتریس قطری باشد برای محاسبه A^n کافی است درایه‌های قطر اصلی را به توان n برسانیم.

ماتریس ترانپوز:

هرگاه در ماتریس $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ جای سطرها و ستونها را عوض کنیم ماتریس A^T به دست می آید که آنرا ترانپوز ماتریس A می نامیم.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix} \rightarrow A^T = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \end{bmatrix}$$

معرفی چند ماتریس:

① $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 0 & 5 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$ ماتریس پادمتناهی

② $B = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 0 \\ 1 & 3 & 7 \end{bmatrix}$ ماتریس متناهی

③ $a_{ij} = a_{ji}$ ماتریس متناهی $\begin{bmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 1 & 5 & 0 \\ 2 & 0 & 6 \end{bmatrix}$

④ $a_{ij} = -a_{ji}$ ماتریس پادمتناهی $\begin{bmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 4 \\ -2 & -4 & 0 \end{bmatrix}$

دترمینان ماتریس: $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \rightarrow \det A = |A| = ad - bc$

$A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} \rightarrow |A| = a \begin{vmatrix} e & f \\ h & i \end{vmatrix} - b \begin{vmatrix} d & f \\ g & i \end{vmatrix} + c \begin{vmatrix} d & e \\ g & h \end{vmatrix}$

مثال: $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

مستطیلاً: $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = (aei + bfg + cdh) - (ceg + afh + bdi)$

مثال آموزشی: ماتریس همساز و الحاقی
 $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$ ، ابعاد 3×3 .
 ↪ سطرانگار
 ↪ همساز

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \quad A^{-1} = \frac{1}{|A|} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

واردون ماتریس مرتبه n :
 $\rightarrow A^{-1} = \frac{1}{|A|} \textcircled{N'}$
 الحاقی

مثلاً $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

حل دستگاه معادلات :

$$\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$$

$$\overbrace{\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}}^A \overbrace{\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}}^X = \overbrace{\begin{bmatrix} c \\ c' \end{bmatrix}}^B \rightarrow AX=B \Rightarrow X=A^{-1}B$$

مثال: دستگاه معادلات زیر را به روش ماتریس وارده حل کنید.

$$\begin{cases} 5x - 3y = 9 \\ 2x + y = 1 \end{cases}$$

انتهرال های دوبانه:

$$\textcircled{1} \int_a^b \int_{w(n)}^{R(n)} f(n,y) dy dn$$

$$\textcircled{2} \int_a^b \int_{v(y)}^{u(y)} f(n,y) dn dy$$

مسائل: حاصل انتهال های زیر را حساب کنید.

$$\textcircled{1} \int_0^2 \int_{\frac{ny}{2}}^n (n^2 + y^2) dn dy =$$

$$\textcircled{2} \int_1^2 \int_0^y \frac{1}{(n+y)^n} dn dy =$$

$$\textcircled{۳} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \int_{\sin n}^{\cos n} 1 \, dy \, dn$$

$$\textcircled{۴} \int_0^1 \int_0^{\frac{1}{n}} e^{ny} \, dy \, dn =$$

$$\textcircled{۵} \int_0^1 dn \int_0^1 \frac{n^r dy}{1+y^r}$$

$$\textcircled{4} \int_{\mu}^4 dn \int_1^2 \frac{dy}{(n+y)^2}$$

مثال: مقدار $\iint_D f(x,y) dA$ وقتی $f(x,y)=xy$ و D ناحیه محدود به خطوط $y=0$ و $y=2x$ ، $x=2$ کدامند؟

مثال: مقدار $\iint_A \frac{\sin n}{n} dA$ که در آن A مثلثی واقع در صفحه xy و محدود به محور n ها، خط $n=1$ و خط $y=n$ می باشد، را بیابید.

مثال: حاصل انتگرال $\iint_R (x^2 + y^2) dx dy$ وقتی R مربعی به رئوس $(0,0)$ ، $(1,1)$ ، $(2,0)$ ، $(1,-1)$ است را بیابید.

تعریف انتگرال لایبی:

$$\textcircled{1} \int_0^1 \int_{\sqrt{y}}^1 e^{xy} dx dy =$$

$$\textcircled{2} \int_0^1 \int_y^1 e^{\frac{y}{x}} dx dy =$$

$$\textcircled{3} \int_0^1 \int_{\sqrt{x}}^1 e^{\frac{y}{x}} dy dx =$$

$$\textcircled{4} \int_0^1 \int_{e^n}^e \frac{1}{\ln y} dy dn =$$

$$\textcircled{5} \int_0^1 \int_{\sqrt{y}}^1 e^{n^2} dn dy =$$

تعبیر انتگرال‌های دوتایی به صورت حجم:

اگر $z = f(x, y)$ در نظر گرفته شود آنگاه انتگرال دوتایی f روی ناحیه D را می‌توان

حجم جسمی تعبیر کرد که از پائین به D و از بالا به رویه $z = f(x, y)$ محدود است و $V = \iint_D f(x, y) dx dy$

مثال: حجم محدود به رویه $z = x^2 + 4y^2$ روی ناحیه $y^2 = x$ و $x^2 = y$ داخل صفحه xy ، چهار برابر.

مثال: حجم محدود بین رویه $z = x^2 + y^2 = 4$ و استوانه $x^2 + y^2 = 16$ و صفحه $z = 0$ ، چهار برابر.

مثال: حجم محصور بین صفحات $z = 4 - y$ و استوانه $x^2 + y^2 = 4$ چقدر است؟

تعبیر انتگرالهای دوبانه به صورت مساوات:

هرگاه در رابطه حجم $f(x, y) = 1$ باشد آنگاه مساوات خاصه سطح D از انتگرال زیر قابل

$$V = \iint_D dxdy \quad \text{محاسبه است.}$$

مثال: سطح محصور بین منحنی $y = 4x - x^2$ و $y = x$ چقدر است؟

محاسبه انتگرال دوجانه در مختصات قطبی :

در انتگرال هایی که محاسبه آنها در مختصات قائم مشکل دارد می توان با استفاده از

$$dy dx = r dr d\theta$$

$$y = r \sin \theta$$

$$x = r \cos \theta$$

روابط مختصات قطبی انتگرال را در دستگاه قطبی محاسبه نمود.

معمولاً وقتی بابت $x^2 + y^2$ دیدیم این روش توصیه می شود.

مثال : انتگرال دوجانه $z = \cos(x^2 + y^2)$ را در ناحیه محصوره $x^2 + y^2 = \frac{\pi}{4}$ بیابید.

مثال : مقدار انتگرال $\iint_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)} dx dy$ را بیابید.

مثال: مقدار $I = \iint_D \sqrt{1-x^2-y^2} \, dx \, dy$ را با فرض این که D ناحیه‌ای محصور بین

دایره $x^2+y^2=1$ باشد بیابید.

مثال: حاصل انتگرال دوگانه $I = \int_0^a \int_0^{\sqrt{a^2-x^2}} \frac{\sqrt{a^2-x^2}}{y^2 \sqrt{x^2+y^2}} \, dy \, dx$ را بیابید.

فرمول های حجم و مساحت در مختصات قطبی:

$$V = \int_0^{\theta} \int_0^r f(r, \theta) r dr d\theta \quad s = \int_0^{\theta} \int_0^r r dr d\theta$$

مثال: مساحت محور بین دایره $r=1$ و منحنی $r=2+\cos\theta$ را بیابید.

نکته: حجم یک جسم فضایی محور بین منحنی های $z_1 = f_1(x, y)$ و $z_2 = f_2(x, y)$

D تقویر جسم مذکور بر صفحه xy باشد از رابطه زیر بدست می آید

$$V = \int_0^{\theta} \int_0^r |f_2(x, y) - f_1(x, y)| dy dx$$

مثال: حجم محور بین سطح $z = 8 - x^2 - y^2$ و $z = x^2 + y^2$ را بیابید.

تغییر متغیر در انتگرال دوطرفه (با استفاده از جاکوبین)

در بعضی موارد که محاسبه انتگرال دوطرفه نسبت به متغیرهای زیر انتگرال پیچیده است

میدان ناحیه انتگرال گیری نامنظم باشد می توانیم u و v را به صورت تابعی از متغیرهای

جدید u و v تعریف کنیم که در این تغییر به جای $du dv$ عبارت $|J| du dv$ قرار می دهیم

که J به صورت زیر تعریف می گردد.

$$x = \phi(u, v) \Rightarrow J = \begin{vmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{vmatrix} = \frac{1}{\begin{vmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{vmatrix}}$$

و افح است که ناحیه D در صفحه مختصات دکارتی در دستگاه دکارتی جدید تغییر می کند و اگر

این ناحیه جدید را D' بنامیم داریم:

$$\iint_D f(x, y) du dv = \iint_{D'} f[\phi(u, v), \omega(u, v)] |J| du dv$$

مثال: اگر A سطح درون یک چهارضلعی با رئوس $(0, 0)$, $(\pi, 0)$, (π, π) , $(0, \pi)$ باشد

حاصل $I = \iint_A (x-y)^2 \sin(x+y) du dv$ را بیابید.

مثال: اگر D ناحیه محصور بین $n=0$ و $y=0$ ، $n+y=1$ باشد آنگاه مقدار

$$\iint_D e^{\frac{n-y}{n+y}} dndy$$

چقدر است؟

مثال: مقدار $I = \iint_D (n^2 + y^2) dndy$ را در صورتی که D ناحیه بین خطوط $y=n$ و $y=-n$ و

$y=n-2$ و $y=2-n$ باشد بیابید.

مقدار متوسط تابع f : مقدار میانگین (متوسط) تابع f بر روی ناحیه D از رابطه زیر حساب می‌شود.

$$\bar{f} = \frac{\iint_D f(x, y) \, dx \, dy}{\text{مساحت ناحیه } D}$$

مثال: مقدار متوسط تابع $f(x, y) = x^2 + y^2$ را بر روی سطح مثلثی به رئوس $(0, 0)$ ، $(1, 1)$ ، $(1, 0)$ بیابید.

جسم، مرکز ثقل و گشتاور ماند یک صفحه سطح:

اگر D یک ناحیه سطح باشد که در نقطه (x, y) دارای چگالی $\rho(x, y)$ باشد آنگاه:

$$D \text{ حجم صفحه} = M = \iint_D \rho(x, y) dx dy$$

$$\text{مختصات مرکز ثقل} = \begin{cases} \bar{x} = \frac{1}{M} \iint_D x \rho(x, y) dx dy = \frac{\iint_D x \rho(x, y) dx dy}{\iint_D \rho(x, y) dx dy} \\ \bar{y} = \frac{1}{M} \iint_D y \rho(x, y) dx dy = \frac{\iint_D y \rho(x, y) dx dy}{\iint_D \rho(x, y) dx dy} \end{cases}$$

$$\text{گشتاور ماند نسبت به محور ها} = I_{x^2} = \iint_D y^2 \rho(x, y) dx dy$$

$$\text{گشتاور ماند نسبت به محور ها} = I_{y^2} = \iint_D x^2 \rho(x, y) dx dy$$

$$\text{گشتاور ماند نسبت به مبدأ مختصات} = I_o = \iint_D (x^2 + y^2) \rho(x, y) dx dy$$

مثال: جسم یک دایره ای شکل به شعاع ۱ با تابع چگالی $\rho = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ در آن است؟

انتگرال‌های سه گانه:

روش حل برای انتگرال‌های سه گانه نیز مانند انتگرال‌های دو گانه می باشد. اگر انتگرال‌های

$$I = \iiint_D f(x, y, z) dz dy dx \quad \text{سه گانه} \quad \text{را در نظر بگیریم و}$$

$$a \leq x \leq b$$

$$\varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(x)$$

$$\omega_1(x, y) \leq z \leq \omega_2(x, y)$$

در این حالت ابتدا نسبت به z انتگرال می گیریم، پس از آن نسبت به y و در نهایت نسبت به x .

$$I = \int_a^b \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} \int_{\omega_1(x, y)}^{\omega_2(x, y)} f(x, y, z) dz dy dx$$

مثال: مقدار $I = \iiint_V x^2 y \, dV$ خاصه محصور به صفحات مختلف و خطوط $x=1, y=1, z=1$

را بیابیم.

مثال: حاصل $\int_0^{\frac{D}{F}} \int_0^z \int_0^y \sin(x+y+z) dx dy dz$ را بیابید.

مثال: حاصل انتگرال $I = 20 \int_1^n \int_0^m \int_0^{ny} x^2 y dz dy dx$ را بیابید.

حجم محصور در ناحیه D را می توان به صورت زیر تعریف نمود: $V = \iiint_D dx dy dz$

مثال: حجم محصور بین صفحات $z=0$ و $z=1$ و منحنی $x^2+y^2=1$ را بیابید.

محاسبه انتگرال های سه گانه با استفاده از مختصات استوانه ای:

$$\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \\ z = z \end{cases}$$

$$dx dy dz = r dr d\theta dz$$

مثال: حجم محدود به $z=0$ و $z=4-x^2-y^2$ و استوانه $x^2+y^2=2$ را بیابید.

مقدار متوسط تابع $f(x, y, z)$:

مقدار میانگین (متوسط) تابع f بر روی ناحیه V از رابطه زیر محاسبه می شود.

$$\bar{f} = \frac{\iiint_V f(x, y, z) dx dy dz}{\text{حجم ناحیه } V}$$

مثال: مقدار متوسط تابع $f(x, y, z) = xyz$ روی یک مکعب که در یک حتم اول واقع

در سه صفحات $x=2$, $y=2$, $z=2$ محدود است را بیابید.

جرم، گشتاورمانده و مرکز ثقل اجسام (دارای حجم)

اگر یک جسم با حجم V با تابع چگالی $\rho = f(x, y, z)$ در نقطه (x, y, z) واقع در ناحیه

V تعریف شود آنگاه روابط جرم جسم، گشتاورمانده نسبت به محورهای مختصات

و مبدأ مختصات و مختصات مرکز ثقل جسم به صورت زیر بیان می گردد.

$$M = \iiint_V \rho dV = \text{جرم جسم}$$

$$\text{مختصات مرکز ثقل} = \begin{cases} \bar{x} = \frac{\iiint_D x \rho dV}{m} \\ \bar{y} = \frac{\iiint_D y \rho dV}{m} \\ \bar{z} = \frac{\iiint_D z \rho dV}{m} \end{cases}$$

$$\text{لستار درمانه نسبت به مبدأ مختصات} = \iiint_D \rho(x^2 + y^2 + z^2) dV$$

$$\text{لستار درمانه نسبت به محور } x \text{ ها} = \iiint_D \rho(y^2 + z^2) dV$$

$$\text{لستار درمانه نسبت به محور } y \text{ ها} = \iiint_D \rho(x^2 + z^2) dV$$

$$\text{لستار درمانه نسبت به محور } z \text{ ها} = \iiint_D \rho(x^2 + y^2) dV$$

مثال: حجم یک سه وجهی محصور بین صفحات مختلفه $x+y+z=1$ در محورهای x, y, z

تابع چگالی $\rho=1$ باشد، مرکز ثقل آن چیست؟

انتگرال روی خم:

$$\omega(t) = (x(t), y(t), z(t))$$

انتگرال میسر $f(x, y, z)$ در امتداد میسر ω به صورت زیر تعریف می شود.

$$\int_{\omega} f \, ds = \int_a^b f(x(t), y(t), z(t)) |\omega'(t)| \, dt \quad |\omega'(t)| = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2}$$

مثال: فرض کنید C مارپیچ $C(t) = (\cos t, \sin t, t)$ و $0 \leq t \leq 2\pi$ ، و $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ ، در این صورت

$$\int_C f(x, y, z) \, ds \text{ محاسبه}$$

نکته: اگر خم C به صورت $y=g(x)$ و $a \leq x \leq b$ باشد آنگاه:

$$\int_C f(x,y) ds = \int_a^b f(x, g(x)) \sqrt{1+(g'(x))^2} dx$$

نکته: اگر خم C به صورت قطبی $r=r(\theta)$ و $\theta_1 \leq \theta \leq \theta_2$ داده شده باشد آنگاه:

$$\int_C f(x,y) ds = \int_{\theta_1}^{\theta_2} f(r \cos \theta, r \sin \theta) \sqrt{r^2 + r'^2} d\theta$$

مثال: حاصل $\int_C y ds$ در طول منحنی C با معادله $y = \sqrt{x}$ از $x=3$ تا $x=4$ را بیابید.

نوعی دیگر:

میدان نیروی $\vec{F} = P(x, y, z)\vec{i} + Q(x, y, z)\vec{j} + R(x, y, z)\vec{k}$ را در نظر بگیرید. چنانچه $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$

بردار موقعی یک نقطه دلخواه در فضا باشد، دامنه کار نیروی F می‌شود دلخواه C به صورت زیر قابل

$$W = \int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_C P(x, y, z)dx + Q(x, y, z)dy + R(x, y, z)dz : \text{محاسبه است}$$

مثال: مطلوب است محاسبه $\int_C (x - y^2)dx + (xy + 1)dy$ که در آن C قسمتی از منحنی

$x = y^2 + y$ می‌باشد که از نقطه $(0, 0)$ تا نقطه $(0, -1)$ و پیوسته شده است.

مثال: اگر C پاره خط واصل از نقطه $(0,1)$ به نقطه $(1,2)$ باشد حاصل انتگرال زیر را بیابید.

$$\int_C (x^2 - y) dx + (y^2 + x) dy$$

انتگرال سطح:

اگر S سطح یک رویه متخفن و ds المان مساحت روی این سطح باشد داریم:

$$\iint_S f(x, y, z) dz$$

اگر سطح S منظم نسبت به محور z باشد (خط موازی محور z حداقل یک نقطه قطع کند) به عبارتی

$$I = \iint_D (f(x, y, p(x, y)) \underbrace{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial p}{\partial y}\right)^2}}_{ds} dx dy \quad \text{اگر } z = p(x, y) \text{ توصیف شده است.}$$

اگر سطح S منظم نسبت به محور x باشد به عبارتی $y = p(x, z)$ توصیف شده است

$$S = \iint_D \underbrace{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial p}{\partial z}\right)^2}}_{ds} dx dz \quad \text{اگر } y = p(x, z) \text{ توصیف شده است.}$$

مثال: مطلوب است محاسبه انتگرال $\iint_S (z-x) ds$ که در آن S قسمتی از صفحه $x+y+z=2$

است که در $\frac{1}{8}$ اول دستگاه مختصات واقع شده است.

مثال: مطلوب است محاسبه انتگرال سطح $I = \iint_S z \, ds$ که در آن S قسمتی از سطح مخروط $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ است که بین صفحات $z=1$ و $z=2$ واقع شده است.

نوعی دیگر:

میران برداری $\vec{F} = P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k}$ را در نظر بگیرید چنانچه سطح یک رویه فضایی بوده و n

برداریکه عمود بر این سطح باشد شارمیان بردار $\vec{F}$ گذرنده از سطح S به صورت زیر

$$\Phi = \iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} \, dS \quad \text{تعریف می شود}$$

مثال چنانچه $z = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$ باشد شارمیان $\vec{F} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ گذرنده

از سطح S را به دست آورید.

